

**А. М. Ильин**  
**А. Р. Данилин**

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ  
В АНАЛИЗЕ**



**А.М. Ильин  
А.Р. Данилин**

# **АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АНАЛИЗЕ**

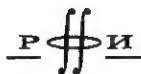


МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2009

УДК 517.928+517.15

ББК 22.16+22.1614

И 46



Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 08-01-07004

Ильин А. М., Данилин А. Р. **Асимптотические методы в анализе.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 248 с. — ISBN 978-5-9221-1056-3.

В монографии систематически излагаются основные понятия и методы асимптотического анализа, как классические, так и разработанные в последнее время. Книга будет полезна студентам и аспирантам математических и технических специальностей, а также исследователям, столкнувшимся с асимптотическими проблемами.

---

Научное издание

*ИЛЬИН Арлен Михайлович*  
*ДАНИЛИН Алексей Руфимович*

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АНАЛИЗЕ**

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*  
Оригинал-макет: *Д.В. Горбачев*  
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 24.11.08. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 15,5. Уч.-изд. л. 16,0. Тираж 200 экз. Заказ № 567

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ООО «Чебоксарская типография № 1»  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

---

ISBN 978-5-9221-1056-3

© ФИЗМАТЛИТ, 2009

© А. М. Ильин, А. Р. Данилин, 2009

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	6
<b>Глава 1. Асимптотические ряды. . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Пример вычисления интеграла . . . . .	9
§ 2. Асимптотические ряды. Определение . . . . .	11
§ 3. Свойства асимптотических рядов . . . . .	21
<b>Глава 2. Применение асимптотического метода для вычисления сумм и рядов. . . . .</b>	<b>28</b>
§ 4. Вывод формулы Эйлера. . . . .	28
§ 5. Вспомогательные оценки. . . . .	30
§ 6. Асимптотика частичной суммы гармонического ряда . . . . .	32
§ 7. О вычислении суммы ряда $S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$ . . . . .	34
<b>Глава 3. Метод Лапласа . . . . .</b>	<b>37</b>
§ 8. Предварительное исследование интеграла Лапласа . . . . .	37
§ 9. Максимум показателя $h(t)$ достигается на границе . . . . .	39
§ 10. Максимум показателя $h(t)$ достигается во внутренней точке. Асимптотика интеграла $F(\lambda)$ в частном случае. . . . .	41
§ 11. Максимум показателя $h(t)$ достигается во внутренней точке. Общий случай. . . . .	44
§ 12. Асимптотика гамма-функции Эйлера. . . . .	49
<b>Глава 4. Метод стационарной фазы . . . . .</b>	<b>56</b>
§ 13. Асимптотика интеграла при отсутствии стационарных точек. . . . .	57
§ 14. Асимптотика интеграла в частном случае . . . . .	58
§ 15. Асимптотика интеграла в случае одной стационарной точки . . . . .	63
§ 16. Асимптотика интеграла в общем случае . . . . .	65
§ 17. Асимптотика функции Бесселя . . . . .	68

<b>Глава 5. Метод перевала . . . . .</b>	<b>71</b>
§ 18. Предварительное исследование интеграла . . . . .	71
§ 19. Построение асимптотики интеграла методом перевала . . . . .	73
§ 20. Асимптотика функции Эйри . . . . .	79
 <b>Глава 6. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка на бесконечности . . .</b>	 <b>85</b>
§ 21. Постановка задачи . . . . .	85
§ 22. Ограниченные колеблющиеся решения . . . . .	86
§ 23. Уравнения с экспоненциально растущими и с экспоненциально быстро стремящимися к нулю решениями . . . . .	92
§ 24. Общее линейное уравнение второго порядка. Преобразования Лиувилля. Примеры . . . . .	99
§ 25. Метод ВКБ. . . . .	107
 <b>Глава 7. Сингулярные задачи . . . . .</b>	 <b>113</b>
§ 26. Сингулярные краевые задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Постановка задачи. Оценка решения . . . . .	113
§ 27. Построение и обоснование асимптотического ряда решения сингулярной краевой задачи . . . . .	118
§ 28. Простейшая бисингулярная задача . . . . .	131
§ 29. Процесс согласования асимптотических разложений . . . . .	142
§ 30. Асимптотика интеграла, зависящего от произведения разномаштабных функций . . . . .	154
 <b>Глава 8. Начальная задача для дифференциального уравнения с малым параметром при производной. . . . .</b>	 <b>169</b>
§ 31. Постановка задачи. Построение формальной асимптотики . . . . .	169
§ 32. Обоснование асимптотического разложения. Система уравнений . .	175
§ 33. Промежуточный пограничный слой. . . . .	178
 <b>Глава 9. Метод двух масштабов для дифференциального уравнения с малым параметром . . . . .</b>	 <b>199</b>
§ 34. Постановка задачи. Построение формальной асимптотики . . . . .	199
§ 35. Обоснование асимптотического разложения. Уравнение Ван дер Поля . . . . .	208

<b>Глава 10. Дифференциальные уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами</b> . . . . .	<b>216</b>
§ 36. Постановка задачи. Построение предельного решения . . . . .	216
§ 37. Построение формальной асимптотики . . . . .	219
§ 38. Существование и единственность решения. Оценка решения. Обоснование асимптотики . . . . .	222
<b>Задачи и упражнения</b> . . . . .	<b>229</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>246</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Асимптотика — понятие, знакомое всем еще со школы по асимптотам гиперболы, занимает незаслуженно малое место в программе университета. Между тем асимптотические методы и асимптотический подход к явлениям отражены чуть ли не в половине современных исследований по математике, физике, механике и многим другим наукам.

В несколько упрощенном виде асимптотическое исследование состоит в отыскании приближенной простой формулы для вычисления сложной функции. Именно так определяется асимптота гиперболы: для удаленных точек гипербола приближенно может быть представлена прямой. Хотя вид гиперболы и формула, ее определяющая, не очень-то сложные, но прямая и формула, ее описывающая, все-таки несколько проще.<sup>1)</sup> А вот примеры трех более сложных задач, по существу асимптотических, но совершенно простых по постановке.

1. На клетчатой бумаге, где длина стороны клетки равна 1, нарисован круг большого радиуса  $R$  (например  $10^6$ ). Сколько точек с целыми координатами (т. е. вершин квадратов) находится внутри круга?

2. Сколько существует простых чисел, которые меньше числа  $n$ ? Это число обычно обозначается  $\pi(n)$ . Например,  $\pi(100) = 25$ ,  $\pi(200) = 46$ . А если  $n$  — большое число, например  $10^9$ ?

3. Как найти значение суммы величин, обратных натуральным числам:

$$Z(m, n) = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n}?$$

Если  $n$  невелико, то поможет обычный калькулятор или, в крайнем случае, компьютер. А если  $n$  велико? Что больше:  $Z_1 = Z(10^{10}, 2 \cdot 10^{10})$ ,  $Z_2 = Z(10^{12}, 2 \cdot 10^{12})$ ,  $Z_3 = Z(10^{15}, 3 \cdot 10^{15})$ ? Тут уж вряд ли поможет даже мощная ЭВМ, если заставить ее просто складывать столько чисел.

Несмотря на схожесть этих вопросов и их внешнюю простоту, перечисленные задачи довольно сложны.

---

<sup>1)</sup> Слово «асимптотика» происходит от греческого слова *συμπτωτός* (ср. слово «симптом») и частицы «α», означающей отрицание. Таким образом, буквальный перевод означает несовпадение, что отражает лишь одно и не самое главное свойство асимптотики. Более важным является как раз близость асимптотики к тому, что она приближает.

Проще всего догадаться об ответе на первый вопрос. Ясно, что число таких точек приближенно равно площади круга, т.е.  $\pi R^2$ . Если центр круга совпадает с одной из вершин квадрата, то, например, для  $5 < R < \sqrt{26}$  площадь круга заключена между значениями 78,5 и 81,7, а число точек равно 81. Это уже неплохая точность. С увеличением  $R$  относительная точность улучшается. Но какова разность между числом точек и  $\pi R^2$ ? Чему она приблизительно равна, какой величине: какой-либо постоянной  $D$ ,  $D_1 R$ ,  $\frac{D_2}{R}$  или совсем другой величине? А если одному из этих выражений, то чему тогда равны постоянные  $D$ ,  $D_1$  или  $D_2$ ? Можно ли еще уточнить выражение для числа таких точек? Это типичные вопросы для асимптотического анализа. Оказывается, данная задача очень трудна и в ее решении имеются лишь отдельные достижения. (Кстати, искомое число целых точек равно, с точностью до легко вычисляемого множителя, числу не превосходящих числа  $R$  частот свободных колебаний закрепленной по краю прямоугольной мембраны.)

Решение второго вопроса — тоже очень сложная задача. Показано (П. Л. Чебышёв, 1848 г.), что  $\pi(n)$  приблизительно равно  $\frac{n}{\ln n}$ . Более того, для достаточно больших  $n$  справедливы оценки  $0,9212 \dots < \frac{\pi(n) \ln n}{n} < 1,1055 \dots$ . Получение более точных формул сопряжено с очень большими трудностями.

А вот ответ на третий вопрос с весьма исчерпывающей полнотой дан еще в 1740 г. Л. Эйлером:  $Z(1, n) = \ln n + C + r_n$ , где  $C = 0,5711 \dots$  — постоянная Эйлера (известно ее значение с огромным числом десятичных знаков, но до сих пор неизвестно, рациональна она или нет), а  $|r_n| < \frac{2}{n}$ . Так что без всяких ЭВМ легко видеть, что с точностью до 9 десятичных знаков  $Z_1 = Z(10^{10}, 2 \cdot 10^{10}) \approx \approx Z_2 = Z(10^{12}, 2 \cdot 10^{12}) \approx \ln 2 = 0,69314718 \dots$ ,  $Z_3 = Z(10^{15}, 3 \cdot 10^{15}) \approx \approx \ln 3 = 1,09861228 \dots$ . Значит,  $Z_3 > Z_1$ ,  $Z_3 > Z_2$ , а вот что больше,  $Z_1$  или  $Z_2$ , ответ на этот вопрос будет дан в гл. 2, где будет получена полная асимптотическая формула для  $Z(m, n)$ . Первые два вопроса, упомянутые выше, не будут далее рассматриваться в данном пособии, их изучение требует весьма глубоких математических методов.

Большую роль играют асимптотические методы в математической физике. По сути дела, асимптотическими являются понятия луча света, волнового пакета, групповой скорости и многих других физических явлений. С другой стороны, наиболее сильные результаты в теории вероятностей, в математической статистике и в такой сугубо математической дисциплине, как теория чисел, также являются асимптотическими (например, распределение простых чисел, как это показано



в задаче 2). Асимптотическое исследование в широком смысле этого слова, состоящее в нахождении простого приближенного выражения для более сложного объекта, фактически составляет основу стандартного курса математического анализа (достаточно вспомнить определение дифференциала и формулу Тейлора).

В книге излагаются основы асимптотического анализа, метод перевала (исследование интегралов от быстро убывающих или быстро колеблющихся функций) и ряд асимптотических задач из теории дифференциальных уравнений.

Знак  $\blacktriangledown$  означает окончание доказательства теоремы или леммы.

Знак  $\infty$ , если не оговорено противное, означает  $+\infty$ .

В заключение отметим, что читать книгу можно выборочно. В гл. 1 даются общие определения и основные свойства асимптотических рядов, которые необходимы для понимания остального материала книги. После просмотра главы 1 можно приступать к чтению почти любой из остальных глав, связи между которыми весьма незначительны.

Совершенно независимы главы 2, 3, 7, 9 и 10. В гл. 4 только в § 15 имеется небольшая ссылка на § 11, в гл. 5 только окончательный вывод формулы апеллирует к гл. 3. Основное содержание гл. 6 тоже абсолютно независимо, лишь примеры в § 24 опираются на § 17 и § 20. Изложение примеров в § 30 не зависит от всех остальных параграфов.

Глава 8 наиболее сложна для изучения и требует знакомства с гл. 7.

# Глава 1

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

### § 1. Пример вычисления интеграла

Требуется найти значение очень простого интеграла

$$I = \int_2^5 \sin x^{10} dx \quad (1.1)$$

с некоторой приемлемой точностью (например, найти первые пять значащих десятичных цифр). Грубая оценка интеграла  $I$  очевидна:

$\left| \int_2^5 f(x) dx \right| \leq \int_2^5 dx = 3$ , но она не дает возможности получить более точное значение  $I$ .

Стандартный путь вычисления по формулам трапеций, Симпсона и т. д. не приводит к результату. Программы прежних лет типа Maple, Mathematica и т. п. отказывались считать этот интеграл, то объявляя, что он расходится, то «зависая». Это вполне понятно, так как подынтегральная функция описывает достаточно интенсивные колебания — ее производная  $10x^9 \cos x^{10}$  достигает значений  $1,9 \times 10^7$ , а вторая производная —  $3 \times 10^{14}$ . Поэтому простое использование приближенных методов квадратур с автоматическим удвоением числа точек разбиений отрезка приводит к беспорядочным изменениям приближенных значений и не достигает требуемой точности. Более современные мощные специализированные программы, конечно, справляются с вычислением этого интеграла, но они, по-видимому, используют как раз асимптотические методы. Покажем, как работает асимптотический метод на этом простейшем примере.

После замены переменной  $y = x^{10}$  интеграл  $I$  приобретает вид  $\frac{1}{10} \cdot \int_2^{5^{10}} y^{-9/10} \sin y dy$ , где подынтегральная функция уже не является быстро колеблющейся. Зато появляется другая неприятность — очень большой промежуток интегрирования, — с которой также не

могут справиться простейшие квадратурные методы. Но именно это обстоятельство — большие значения пределов интегрирования — дает возможность применить простой асимптотический метод.

Введем обозначение

$$Z(t, \alpha) = \int_t^{\infty} y^{-\alpha} \sin y \, dy.$$

Этот интеграл сходится, как известно, при  $t > 0$  и любом  $\alpha > 0$ , а

$$I = \frac{1}{10} \cdot \left[ Z\left(2^{10}; \frac{9}{10}\right) - Z\left(5^{10}; \frac{9}{10}\right) \right]. \quad (1.2)$$

Интеграл  $Z(t, \alpha)$  при больших значениях  $t$  легко вычисляется методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} Z(t, \alpha) &= \int_t^{+\infty} y^{-\alpha} \sin y \, dy = -y^{-\alpha} \cos y \Big|_t^{+\infty} - \alpha \int_t^{+\infty} y^{-\alpha-1} \cos y \, dy = \\ &= t^{-\alpha} \cos t - \alpha \left[ y^{-\alpha-1} \sin y \Big|_t^{+\infty} + (\alpha+1) \int_t^{+\infty} y^{-\alpha-2} \sin y \, dy \right] = \\ &= t^{-\alpha} \cos t + \alpha \cdot t^{-\alpha-1} \sin t - \alpha(\alpha+1) \int_t^{+\infty} y^{-\alpha-2} \sin y \, dy. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям еще два раза и в результате получим

$$\begin{aligned} Z(t, \alpha) &= \frac{\cos t}{t^{\alpha}} + \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}} \cdot \alpha - \frac{\cos t}{t^{\alpha+2}} \cdot \alpha(\alpha+1) - \\ &\quad - \frac{\sin t}{t^{\alpha+3}} \cdot \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) + R(t, \alpha), \quad (1.3) \end{aligned}$$

где  $R = R(t, \alpha) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \cdot \int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\alpha+4}} \, dy$  — остаток. Убедимся, что остаток достаточно мал, оценив его по абсолютной величине:

$$\begin{aligned} |R(t, \alpha)| &= \left| \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \cdot \int_t^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\alpha+4}} \, dy \right| \leq \\ &\leq \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \cdot \int_t^{+\infty} y^{-\alpha-4} \, dy = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot t^{-\alpha-3}. \end{aligned}$$

Подставив  $\alpha = \frac{9}{10}$ ,  $t = 2^{10}$ , получим, что

$$\left| R\left(2^{10}, \frac{9}{10}\right) \right| < 6 \cdot 2^{10(-\frac{9}{10}-3)} < 1,2 \cdot 10^{-11},$$

$$\left| R\left(5^{10}, \frac{9}{10}\right) \right| < 6 \cdot 5^{-39} < 4 \cdot 10^{-20}.$$

Из формулы (1.3) имеем

$$Z\left(2^{10}, \frac{9}{10}\right) \approx 0,001\,928\,149\,7, \quad Z\left(5^{10}, \frac{9}{10}\right) \approx -5,112\,053\,778\,46 \cdot 10^{-7}.$$

Окончательно из (1.2):  $I \approx 1,927\,638\,5 \cdot 10^{-4}$ , причем все десятичные знаки верные! Для получения 5 значащих цифр можно было бы ограничиться меньшим числом членов в формуле (1.3). Если продолжить интегрирование по частям, то можно получить еще большую точность. Можно ли получить таким образом любую наперед заданную точность? Это мы выясним в следующем параграфе.

## § 2. Асимптотические ряды. Определение

Снова рассмотрим пример прошлого параграфа. Немного удобнее исследовать интеграл

$$V(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{iy}}{y} dy, \quad Z(t, 1) = \Im V(t).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$V(t) = -\frac{e^{it}}{it} - \frac{e^{it}}{(it)^2} - 2 \frac{e^{it}}{(it)^3} - 3! \frac{e^{it}}{(it)^4} - \dots$$

$$\dots - (n-1)! \frac{e^{it}}{(it)^n} + n! \int_t^{\infty} \frac{e^{iy}}{i^n y^{n+1}} dy. \quad ^1) \quad (2.1)$$

Если  $n < t$ , то каждый следующий член выписанной суммы меньше предыдущего и дает более точное приближение функции  $V(t)$ . Поэтому при больших значениях  $t$  несколько членов выписанной суммы дают очень хорошее приближение (как это было показано в § 1). Но если при фиксированном  $t$  число членов неограниченно увеличивать, то видно, что приближение, наоборот, ухудшается — члены суммы неограниченно растут с ростом  $n$ . (Нельзя желать слишком многого!)

<sup>1)</sup> Проще всего проверить эту и подобные формулы, дифференцируя почленно левую и правую части предполагаемого равенства.

Мы имеем пример асимптотического приближения:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad V(t) = \sum_{k=0}^{n-1} k! \frac{-e^{it}}{(it)^{k+1}} + R_n(t), \quad (2.2)$$

где

$$|R_n(t)| = \left| n! \int_t^{\infty} \frac{e^{iy}}{i^n y^{n+1}} dy \right| < (n-1)! \cdot t^{-n}.$$

Ценность формулы (2.2) возрастает с ростом  $t$ . Так мы приходим к пониманию асимптотического представления функции, примером которого является (2.2). *Асимптотика не имеет смысла до тех пор, пока не указано, о каком предельном переходе идет речь.*<sup>1)</sup> Формула (2.2) носит асимптотический характер, если оговорено, что  $t \rightarrow \infty$ . Согласно приведенной оценке остаточного члена  $R_n(t)$  его модуль по порядку не превосходит модуля последнего члена суммы (2.2). Но легко улучшить эту оценку. Для этого надо еще раз проинтегрировать  $R_n(t)$  по частям. В результате получим оценку

$$|R_n(t)| = \left| -n! \frac{e^{it}}{(it)^{n+1}} + (n+1)! \int_t^{\infty} \frac{e^{iy}}{i^{n+1} y^{n+2}} dy \right| < 2n! \cdot t^{-n-1}. \quad (2.3)$$

Формула (2.2) — это пример асимптотического представления.

**Определение 2.1.** Пусть функция  $F(t)$  определена при всех достаточно больших  $t$ . Будем говорить, что для функции  $F(t)$  справедливо асимптотическое представление при  $t \rightarrow \infty$ , если для этих  $t$

$$F(t) = \sum_{k=0}^n \psi_k(t) + R_n(t),$$

где каждый последующий член суммы по порядку меньше предыдущего, т. е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi_{k+1}(t)}{\psi_k(t)} = 0$ , а  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_n(t)}{\psi_n(t)} = 0$ .

Это определение весьма общее, и во многих задачах удобнее конкретизировать вид функций  $\psi_k(t)$ .

Начнем с определения асимптотического разложения по степеням аргумента  $t$ .

<sup>1)</sup> Точно так же не имеет смысла и само понятие предела функции  $f(x)$ , если не указано, о каком предельном переходе аргумента идет речь, обязательно должно быть сказано:  $x \rightarrow 0$ , или  $x \rightarrow \infty$ , или  $x \rightarrow x_0$  и т. п.

**Определение 2.2.** Пусть функция  $f(t)$  определена при  $t > A$  для некоторого положительного  $A$ . Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k} \quad (2.4)$$

называется *асимптотическим рядом функции  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$* , если для любого натурального  $n$  и любого  $t > A$  справедливо неравенство

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^n a_k t^{-k} \right| < M_n t^{-n-1}, \quad (2.5)$$

где  $M_n$  — некоторая положительная постоянная, вообще говоря зависящая от  $n$ .

В случае выполнения неравенств (2.5) говорят также, что *функция  $f(t)$  разлагается в асимптотический ряд (2.4) при  $t \rightarrow \infty$* , что записывается в виде

$$f(t) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в рассмотренном выше примере равенство (2.2) может быть записано в виде

$$-e^{-it} \int_t^{\infty} \frac{e^{iy}}{y} dy \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)! i^{-k} t^{-k}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Если сделать замену  $t = x^{-1}$ , то аналогично предыдущему приходим к определению асимптотики при  $x \rightarrow 0$ .

**Определение 2.3.** Пусть функция  $f(x)$  определена при  $0 < x < b$  для некоторого  $b > 0$ . Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (2.7)$$

называется *асимптотическим рядом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +0$* , если для любого натурального  $n$  и любого  $x \in (0; b)$  справедливо неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| < M_n x^{n+1}, \quad (2.8)$$

где  $M_n$  — некоторая положительная постоянная, вообще говоря зависящая от  $n$ .

В случае выполнения неравенств (2.8) говорят также, что функция  $f(x)$  разлагается в асимптотический ряд (2.7) при  $x \rightarrow +0$ , что записывается в виде

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow +0.$$

Совершенно аналогично определяются асимптотические ряды при  $x \rightarrow -0$ , при  $x \rightarrow 0$  и при  $x \rightarrow x_0$ .

Если функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема в окрестности нуля, то она разлагается в асимптотический ряд по степеням  $x$  при  $x \rightarrow 0$ . Это немедленно вытекает из известной формулы

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

и из определения асимптотического ряда.

В частности, если функция  $f(x)$  аналитична в окрестности нуля, то она по определению разлагается в *сходящийся* степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

который одновременно является и асимптотическим. Таким образом, если ряд (2.7) сходится, то он является асимптотическим. Верно ли обратное?

Снова рассмотрим пример (2.6), заменяя  $t$  на  $x^{-1}$ :

$$-e^{-ix^{-1}} \int_{x^{-1}}^{\infty} \frac{e^{iy}}{y} dy \approx \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)! i^{-k} x^k, \quad x \rightarrow +0. \quad (2.9)$$

Этот ряд расходится для всех  $x > 0$ ! Тем не менее его частичные суммы при малых  $x$  прекрасно приближают функцию  $-e^{-ix^{-1}} \int_{x^{-1}}^{\infty} \frac{e^{iy}}{y} dy$ , как это показано на похожем примере в начале предыдущего параграфа. Из формулы (2.1) и оценки (2.3) легко получить, что для  $x < 1/10$  первые четыре члена ряда (2.9) приближают функцию с точностью до 0,0005. Для меньших значений  $x$  точность приближений еще лучше, но в отличие от сходящегося ряда здесь нельзя увеличивать число членов в частичной сумме ряда (2.9). Члены ряда (2.9) неограниченно растут с ростом  $n$ , и тогда при

увеличении  $n$  ни о каком приближении функции (2.9) не может быть и речи.<sup>1)</sup>

**Соотношение между сходящимися и асимптотическими степенными рядами.** Как указано выше, если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x)$$

сходится в окрестности нуля, то этот ряд является и асимптотическим для его суммы:

$$f(x) \stackrel{\text{ас}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Обратное, как мы видели на примере (2.9), неверно. Ряд (2.10) может расходиться. Но даже если он сходится, его сумма может равняться функции  $f(x)$ , а может быть равной и другой функции. Так, например, функция, равная  $e^{-x^{-2}}$  при  $x \neq 0$  и равная 0 при  $x = 0$ , стремится к нулю при  $x \rightarrow 0$  быстрее любой степени  $x$ . Поэтому все члены ее асимптотического ряда по степеням  $x$  равны нулю. Сумма этого ряда, естественно, равна нулю, а не функции  $e^{-x^{-2}}$ .

**Асимптотические ряды по последовательности калибровочных функций.** Сначала напомним определения символов  $o$  и  $O$ .

**Определение 2.4.** Пусть функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  определены в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , которая может быть как конечной, так и бесконечно удаленной точкой. Обозначение

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad \text{при } x \rightarrow a$$

по определению равносильно условию  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ .

<sup>1)</sup> Не надо думать, что асимптотические ряды — это ряды «второго сорта» по сравнению со сходящимися степенными рядами. Несомненно, что аналитические функции, определяющиеся сходящимися степенными рядами, обладают многими замечательными свойствами, которые и изучает теория функций комплексной переменной. Однако с точки зрения теории приближения функций асимптотические ряды (даже расходящиеся!) зачастую оказываются очень полезными, как это видно из примера (2.2) и как будет показано в следующих параграфах. А замечательные степенные ряды иногда бесполезны.

Например, ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ , как известно, прекрасно сходится к функции  $e^z$  быстрее любой геометрической прогрессии. Однако при  $z = -20$  частичная сумма первых двадцати одного членов этого ряда равна  $-19\,770\,222,15$ , тогда как  $e^{-20} = 0,20611 \cdot 10^{-8}$ . Поэтому, если вести счет с десятью знаками после запятой, то любое число членов ряда даст совершенно неверный результат, хотя теоретически ряд сходится к  $e^{-20}$ .



Заметим, что наиболее часто данное определение употребляется в случае, когда обе функции являются одновременно или бесконечно малыми при  $x \rightarrow a$ , или бесконечно большими при  $x \rightarrow a$ .

В первом случае говорят, что  $\alpha(x)$  есть *бесконечно малая более высокого порядка*, чем  $\beta(x)$ , или что  $\alpha(x)$  *стремится к нулю быстрее*, чем  $\beta(x)$ .

Во втором — что  $\beta(x)$  есть *бесконечно большая более высокого порядка*, чем  $\alpha(x)$ , или что  $\beta(x)$  *стремится к бесконечности быстрее*, чем  $\alpha(x)$ .

**Определение 2.5.** Пусть функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  определены в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ . Обозначение

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \quad \text{при } x \rightarrow a$$

по определению равносильно условию: существует окрестность точки  $a$  и существует такая положительная постоянная  $M$ , что для всех  $x$  из этой окрестности

$$|\alpha(x)| \leq M \cdot |\beta(x)|. \quad 1)$$

Заметим, что данное определение не подразумевает наличия пределов у функций  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow a$ .

В дальнейшем, не оговаривая этого, запись  $o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$  или  $O(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$  будем применять к функциям  $\beta(x)$ , отличным от нуля в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ .

Очевидно, что если  $\alpha(x) = o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$ , то

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \quad \text{при } x \rightarrow a.$$

Если  $\alpha_1(x) = o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$  и  $\alpha_2(x) = o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$ , а  $\alpha_1(x)$  и  $\alpha_2(x)$  — ограниченные функции, то

$$\alpha_1(x)\alpha_1(x) + \alpha_2(x)\alpha_2(x) = o(\beta(x)) \quad \text{при } x \rightarrow a.$$

Простейшие примеры:

$$\sin x = o(\sqrt{x}) \quad \text{при } x \rightarrow +0,$$

$$x^2 = o(\sin x) \quad \text{при } x \rightarrow -0,$$

$$x^3 = o(x^2) \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

$$x^2 + 1 = o(x^4) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty,$$

$$x = O(\sin x) \quad \text{при } x \rightarrow +0,$$

<sup>1)</sup> Определение  $o$  общеупотребительно во всей математике и физике. А символ  $O$  иногда понимается по-разному. Приведенное здесь определение характерно для асимптотических методов, теории дифференциальных уравнений, математической физики и др. С другой стороны, во многих работах по теории функций дается немного другое определение этого символа.

$$100x^2 + \sin x = O(x^2) \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

$$\exp(-x^{1/3}) = o(x^{-10}) \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

$$\ln x = o(x^{1/10}) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

**Определение 2.6.** Равенства вида  $\alpha(x) = o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$ ,  $\alpha(x) = O(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$  называются еще *асимптотическими равенствами*.

**З а м е ч а н и е.** Следует отметить, что асимптотические равенства некоммутативны, они не являются равенствами в привычном смысле. Так, например,  $\sin x = o(x^{1/2})$  при  $x \rightarrow +0$ , но нельзя утверждать, что  $o(x^{1/2})$  при  $x \rightarrow +0$  есть  $\sin x$ .

Поэтому запись  $\alpha(x) = o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$  ( $\alpha(x) = O(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$ ) лучше читать, как  $\alpha(x)$  есть  $o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$  ( $\alpha(x)$  есть  $O(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$ ).

Степенные функции  $x^n$  весьма просты и удобны, но далеко не всегда существуют асимптотические разложения по системе этих функций. Во многих случаях необходимо пользоваться другими системами функций.

**Определение 2.7.** Последовательность функций  $\varphi_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) будем называть *калибровочной системой при  $x \rightarrow a$* <sup>1)</sup>, если для любого  $n$

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)) \quad \text{при } x \rightarrow a.$$

**Определение 2.8.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ .

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (2.11)$$

называется *асимптотическим рядом функции  $f(x)$  по калибровочной последовательности функций  $\varphi_n(x)$  при  $x \rightarrow a$* , если для любого натурального  $n$  справедливо неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right| < M_n |\varphi_{n+1}(x)|, \quad (2.12)$$

где  $M_n$  — некоторая положительная постоянная, вообще говоря зависящая от  $n$ .

<sup>1)</sup> Более употребительно название «асимптотическая система», но ввиду перегруженности термина «асимптотическая» здесь будет употребляться термин «калибровочная».

Такое определение берет свое начало, по-видимому, с работы А. Пуанкаре ([19]), которому принадлежат основополагающие работы по математике и механике, в которых активно использовались асимптотические методы. Очевидно, что фигурирующие в определении 2.2 и определении 2.3 асимптотические ряды по степеням  $t^{-1}$  и  $x$  являются частными случаями асимптотического ряда (2.11) в смысле Пуанкаре.

Примеры калибровочных последовательностей, которые встречаются в задачах математики и физики:

$$1, x^{1/3}, x^{2/3}, x, x^{4/3}, \dots, x \rightarrow +0;$$

$$x, x^2 \ln x, x^2, x^3 \ln^2 x, x^3 \ln x, x^3, x^4 \ln^3 x, x^4 \ln^2 x, x^4 \ln x, \\ x^4, x^5 \ln^4 x, \dots, x \rightarrow +0.$$

Соотношение (2.12) можно записать в эквивалентном виде:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)) \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (2.13)$$

**Определение 2.9.** Пусть  $\{\varphi_k(x)\}$  — калибровочная последовательность при  $x \rightarrow a$ . Равенство вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)) \quad \text{при } x \rightarrow a$$

или

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)) \quad \text{при } x \rightarrow a$$

будем называть *асимптотическим представлением порядка  $n$  функции  $f$  по калибровочной последовательности  $\{\varphi_k(x)\}$* .

Непосредственно из определения следует, что функция  $f(x)$  тогда и только тогда разлагается в асимптотический ряд по калибровочной последовательности  $\{\varphi_k(x)\}$ , когда для любого натурального  $N$  справедливо асимптотическое представление порядка  $N$  функции  $f(x)$  по той же калибровочной последовательности.

Как мы видели на примере (2.6), асимптотический ряд может расходиться, а его члены могут весьма быстро расти. Естественно задаться вопросом: как быстро могут расти члены ряда, чтобы он был асимптотическим рядом какой-нибудь функции? Ответ довольно интересен.

**Теорема 2.1.** Для любой последовательности  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ) существует функция  $f(x)$ , непрерывная при  $|x| < 1$  и такая, что

$$f(x) \overset{\text{ас}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = a_0 + a_1x + \sum_{k=2, a_k \neq 0}^{\infty} a_k x^k \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2^k |a_k| x^2}\right)\right). \quad (2.15)$$

Прежде всего покажем, что ряд (2.15) равномерно сходится при  $|x| < 1$ . Так как при  $y \geq 0$  справедливо неравенство  $1 - \exp(-y) \leq y^1$ , то каждый член ряда (2.15) по модулю не превосходит  $2^{-k} |x|^{k-2}$ . Следовательно, ряд (2.15) равномерно сходится при  $|x| < 1$  и его сумма  $f(x)$  является непрерывной функцией. Осталось доказать справедливость асимптотики (2.14). Исходя из определения 2.3 рассмотрим разность

$$\begin{aligned} f(x) - \left[ a_0 + a_1x + \sum_{k=2}^n a_k x^k \right] &= a_0 + a_1x + \\ &+ \sum_{k=2, a_k \neq 0}^{\infty} a_k x^k \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2^k |a_k| x^2}\right)\right) - \left[ a_0 + a_1x + \sum_{k=2}^n a_k x^k \right] = \\ &= \sum_{k=n+3, a_k \neq 0}^{\infty} a_k x^k \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2^k |a_k| x^2}\right)\right) - \\ &- \sum_{k=2, a_k \neq 0}^{n+2} a_k x^k \left(\exp\left(-\frac{1}{2^k |a_k| x^2}\right)\right) + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2}. \end{aligned}$$

Но  $\left| \sum_{k=n+3, a_k \neq 0}^{\infty} a_k x^k \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2^k |a_k| x^2}\right)\right) \right| \leq \sum_{k=n+3}^{\infty} 2^{-k} |x|^{k-2} < |x|^{n+1}$ , вторая сумма — это  $o(|x|^N)$  при  $x \rightarrow 0$  и при всех  $N$ , а два последних члена — это  $O(|x|^{n+1})$  при  $x \rightarrow 0$ . ▼

Выше упоминалось, что асимптотический ряд не определяет однозначно функцию, которая разлагается в этот асимптотический ряд. С другой стороны, функция также может разлагаться в асимптотический ряд по разным калибровочным функциям. Но если система калибровочных функций фиксирована, то асимптотика определяется однозначно.

<sup>1)</sup> Для проверки этого неравенства можно рассмотреть функцию  $g(y) = 1 - \exp(-y) - y$ . Так как  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) = 0$ ,  $g''(y) < 0$ , то  $g(y) < 0$  при  $y \neq 0$ .

**Теорема 2.2.** Пусть последовательность функций  $\varphi_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) является калибровочной системой при  $x \rightarrow a$  и

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \rightarrow a. \quad (2.16)$$

Тогда коэффициенты  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , однозначно определяются функцией  $f(x)$ .

Тем самым асимптотическое представление функции по заданной калибровочной последовательности единственно.

**Доказательство.** Пусть справедливо еще одно асимптотическое представление функции  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \rightarrow a. \quad (2.17)$$

Тогда

$$f(x) - f(x) = 0 = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \rightarrow a. \quad (2.18)$$

Из определения калибровочной последовательности следует равенство

$$(a_1 - b_1) \varphi_1(x) = o(\varphi_1(x)), \quad x \rightarrow a.$$

Поделив это равенство на  $\varphi_1(x)$  и перейдя к пределу при  $x \rightarrow a$ , получим  $a_1 = b_1$ .

Далее доказательство продолжается по индукции. Пусть  $a_k = b_k$  при  $k \leq m < n$ . Тогда равенство 2.18 имеет вид

$$0 = \sum_{k=m+1}^n (a_k - b_k) \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \rightarrow a.$$

Отсюда получаем, что

$$(a_{m+1} - b_{m+1}) \varphi_{m+1}(x) = o(\varphi_{m+1}(x)), \quad x \rightarrow a.$$

Следовательно,  $a_{m+1} = b_{m+1}$ . ▽

**С л е д с т в и е.** Асимптотическое разложение функции по заданной калибровочной последовательности единственно.

**Эквивалентность различных определений асимптотического разложения.** При доказательстве справедливости асимптотики конкретной функции зачастую затруднительно установить оценку (2.12) (а также оценки (2.5) и (2.8)). Однако ввиду произвольности номера  $n$  достаточно установить более слабую оценку.

Рассмотрим лишь асимптотики по степеням  $x$  при  $x \rightarrow 0$ . Для асимптотик по другим калибровочным последовательностям ситуация вполне аналогичная.

**Теорема 2.3.** *Эквивалентны следующие определения асимптотического разложения:*

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0 \quad (2.19)$$

$$\text{I. } \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + O(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

$$\text{II. } \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

$$\text{III. } \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m_n \geq n: \quad f(x) = \sum_{k=0}^{m_n} a_k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

**Доказательство.** Очевидно, что из соотношения I вытекает соотношение II, а из соотношения II вытекает соотношение III, если положить  $m_n = n$ . Остается доказать, что из соотношения III вытекает соотношение I.

Действительно, пусть выполнено III. Тогда, заменяя в этом равенстве  $n$  на  $n+1$ , получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{m_{n+1}} a_k x^k + o(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=n+1}^{m_{n+1}} a_k x^k + o(x^{n+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n a_k x^k + O(x^{n+1}). \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

### § 3. Свойства асимптотических рядов

Для асимптотических рядов справедливы свойства, аналогичные свойствам сходящихся рядов. Доказательства даже несколько проще, так как в определении асимптотического ряда фигурируют лишь конечные суммы.

**Теорема 3.1.** *Пусть последовательность функций  $\varphi_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) является калибровочной системой при  $x \rightarrow a$  и*

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad x \rightarrow a, \quad g(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x), \quad x \rightarrow a.$$

Тогда линейная комбинация  $F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$  также разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow a$ :

$$F(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (c_1 a_k + c_2 b_k) \varphi_k(x), \quad x \rightarrow a. \quad (3.1)$$

Доказательство вполне очевидно в силу одного из определений асимптотического ряда:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)),$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g(x) = \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)).$$

Следовательно,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F(x) = \sum_{k=1}^n (c_1 a_k + c_2 b_k) \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a,$$

что эквивалентно (3.1). ▼

Столь же несложно выяснить вопрос об умножении, делении и интегрировании асимптотических рядов. Однако выкладки для рядов по произвольной системе калибровочных функций довольно громоздки. Поэтому коснемся этих вопросов только для рядов по системе  $x^k$ , оставив подробные исследования для асимптотических рядов по произвольной системе калибровочных в качестве упражнений.

**Теорема 3.2.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  разлагаются в асимптотические ряды при  $x \rightarrow 0$ :

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0, \quad g(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

Тогда функция  $f(x)g(x)$  также разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow 0$ :

$$f(x)g(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad x \rightarrow 0,$$

где коэффициенты  $c_k$  вычисляются так же, как и при умножении многочленов, путем формального перемножения асимптотических

рядов:  $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$ .

Доказательство. Действительно, так как

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g(x) = \sum_{k=1}^n b_k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

то,

$$f(x) \cdot g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$$

$$\dots + c_n x^n + x^{n+1}(a_1 b_n + \dots + a_n b_1) + \dots$$

$$\dots + a_n b_n x^{2n} + \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \cdot o(x^n) + \left( \sum_{k=0}^n b_k x^k \right) \cdot o(x^n) +$$

$$+ o(x^n) \cdot o(x^n) = \left( \sum_{k=0}^n c_k x^k \right) + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \quad \blacktriangledown$$

Делить один асимптотический ряд на другой тоже можно, но, как всегда, при делении надо соблюдать некоторую осторожность.

**Теорема 3.3.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  разлагаются в асимптотические ряды при  $x \rightarrow 0$ :

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0, \quad g(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad x \rightarrow 0$$

и  $a_0 \neq 0$ .

Тогда функция  $\frac{g(x)}{f(x)}$  также разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow 0$ :

$$\frac{g(x)}{f(x)} \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad x \rightarrow 0,$$

где  $c_k$  — некоторые постоянные.

**Доказательство.** Вследствие предыдущей теоремы достаточно показать, что разлагается в асимптотический ряд функция  $\frac{1}{f(x)}$ . Для этого опять воспользуемся определением асимптотического ряда:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)} = a_0^{-1} \frac{1}{1 - z_n(x)},$$



где

$$z_n(x) = -a_0^{-1} \sum_{k=1}^n a_k x^k + \beta_n(x) = O(x), \quad \beta_n(x) = o(x^n).$$

Так как  $z_n(x) = O(x)$ , то  $|z_n(x)| < 1/2$  при малых  $x$ , и поэтому  $\frac{1}{1 - z_n(x)}$  можно разложить в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1 - z_n(x)} = \sum_{k=0}^n (z_n(x))^k + O((z_n(x))^{n+1}) = \sum_{k=0}^n (z_n(x))^k + O(x^{n+1}).$$

Раскроем скобки в выражениях  $(z_n(x))^k$ , сгруппируем одинаковые степени  $x$  и учтем, что различные степени  $\beta_n(x)$  также являются величинами  $o(x^n)$ . В результате имеем

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n)$$

для некоторых коэффициентов  $c_k$ , что и завершает доказательство. ▼

**З а м е ч а н и е.** Отметим, что коэффициенты  $\{c_k\}$  асимптотического разложения функции  $1/f$  можно получить другим путем — решая систему уравнений, получающуюся из соотношения  $f(x) \cdot (1/f(x)) = 1$  т. е.  $1 \stackrel{\text{as}}{=} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right)$ :

$$\begin{cases} 1 = a_0 c_0, \\ 0 = a_0 c_1 + a_1 c_0, \\ 0 = a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0, \\ \dots \end{cases}$$

Условие  $a_0 \neq 0$  для функций  $f(x)$ , разлагающихся в асимптотический ряд вида

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

эквивалентно условию: функция  $f(x)$  непрерывна в нуле и  $f(0) \neq 0$ . Ясно, что это условие является существенным, так как даже для такой простой функции, как  $f(x) \equiv x$ , функция  $\frac{1}{f(x)}$  уже не разлагается в асимптотический ряд вида (3.2).

Для того чтобы существенно расширить класс функций, допускающих операцию деления, удобно ввести калибровочные функции  $x^k$  с любыми целыми показателями  $k$  и ряды вида

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=r}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

где  $r$  — какое-нибудь целое число (возможно, и отрицательное). Так что к этому классу функций принадлежат, например, функции  $\frac{1}{\sin x}$ ,  $\frac{1}{x^3}$ ,  $\frac{1}{P(x)}$ , где  $P(x)$  — это любой многочлен, не равный нулю тождественно.

**Теорема 3.4.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  разлагаются в асимптотические ряды вида (3.3) при  $x \rightarrow 0$ :

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=r_1}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0, \quad g(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=r_2}^{\infty} b_k x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

Тогда функция  $f(x)g(x)$  также разлагается в асимптотический ряд вида (3.3) при  $x \rightarrow 0$ :

$$f(x)g(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=r_1+r_2}^{\infty} c_k x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 3.3. ▼

**Теорема 3.5.** Пусть функция  $f(x)$  разлагается в асимптотический ряд вида (3.3) при  $x \rightarrow 0$ :

$$f(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=r}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0,$$

и хотя бы один из коэффициентов  $a_k \neq 0$ . Тогда функция  $\frac{1}{f(x)}$  также разлагается в асимптотический ряд вида (3.3) при  $x \rightarrow 0$ :

$$\frac{1}{f(x)} \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=r_1}^{\infty} c_k x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что  $a_r \neq 0$ . Тогда  $f(x) = a_r x^r \cdot f_1(x)$ , где

$$f_1(x) \stackrel{\text{as}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{r+k}}{a_r} x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

Поэтому утверждение теоремы вытекает из равенства  $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_r} x^{-r} \cdot \frac{1}{f_1(x)}$ , из теоремы 3.3, примененной к функциям  $f_1(x)$  и 1, и из теоремы 3.4. ▼

Асимптотические ряды допускают почленное интегрирование. Это относится как к случаю  $x \rightarrow 0$  (или, что то же самое, к случаю  $x \rightarrow x_0$ , где  $x_0$  — конечная точка), так и к случаям  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ . Как

всегда при обращении с асимптотическими рядами, их сходимость не предполагается (хотя и не исключается), но, разумеется, требуются интегрируемость рассматриваемой функции и некоторая осторожность в тех случаях, когда расходится интеграл от  $x^k$ .

**Теорема 3.6.** Пусть функция  $f(x)$  определена и интегрируема по Риману на отрезке  $0 \leq x \leq A$  и разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow 0$ :

$$f(x) \overset{\text{ас}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

Тогда  $\int_0^x f(s) ds$  также разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow 0$ :

$$\int_0^x f(s) ds = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad x \rightarrow 0.$$

**Доказательство.** Равенство  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \beta_n(x)$ , где  $\beta_n(x) = o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$ , справедливое для любого натурального  $n$ , проинтегрируем от 0 до  $x$ :

$$\int_0^x f(s) ds = \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \beta_n(s) ds.$$

Так как  $\beta_n(x) = o(x^n)$ , то  $\int_0^x \beta_n(s) ds = o(x^{n+1})$ . ▽

**Теорема 3.7.** Пусть функция  $f(x)$  определена при  $0 < x \leq A$ , интегрируема по Риману на отрезке  $[\alpha; A]$  при всех  $\alpha \in (0; A)$  и разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow 0$ :

$$f(x) \overset{\text{ас}}{=} \sum_{k=r}^{\infty} a_k x^k, \quad x \rightarrow 0,$$

где  $r < 0$ . Тогда  $\int_A^x f(s) ds$  также разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow 0$ :

$$\int_A^x f(s) ds = \sum_{k=r}^{-2} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + a_{-1} \ln x + C + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad x \rightarrow 0.$$

(Если  $r = -1$ , то в этом равенстве первая сумма, естественно, отсутствует.) Здесь постоянная  $C = -\sum_{k=r}^{-2} a_k \frac{A^{k+1}}{k+1} - a_{-1} \ln A - \int_0^A \left( f(s) - \sum_{k=r}^{-1} a_k s^k \right) ds$ .

Доказательство. Из вида асимптотического ряда функции  $f(x)$  следует, что интеграл  $\int_0^x \left( f(s) ds - \sum_{k=r}^{-1} a_k s^k \right) ds$  сходится. Поэтому

$$\int_A^0 \left( f(s) - \sum_{k=r}^{-1} a_k s^k \right) ds = \int_A^x \left( f(s) - \sum_{k=r}^{-1} a_k s^k \right) ds + \int_x^0 \left( f(s) - \sum_{k=r}^{-1} a_k s^k \right) ds. \quad (3.4)$$

Так как функция  $f(x) - \sum_{k=r}^{-1} a_k x^k$  при  $x \rightarrow 0$  разлагается в асимптотический ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ , то из предыдущей теоремы следует, что

$$\int_x^0 \left( f(s) - \sum_{k=r}^{-1} a_k s^k \right) ds = - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Из этого равенства и из равенства (3.4) вытекает утверждение теоремы. ▼

**Теорема 3.8.** Пусть функция  $f(x)$  определена и интегрируема по Риману при  $0 < A \leq x < \infty$  и разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow \infty$ :

$$f(x) \stackrel{as}{=} \sum_{k=-r}^{\infty} a_k x^{-k},$$

где  $r < 0$ . Тогда  $\int_A^x f(s) ds$  также разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\int_A^x f(s) ds = \sum_{k=-r}^0 a_k \frac{x^{-k+1}}{1-k} + a_1 \ln x + C + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \frac{x^{-k+1}}{1-k}.$$

Доказательство фактически не отличается от доказательства теоремы 3.6. ▼

## Глава 2

# ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММ И РЯДОВ

### § 4. Вывод формулы Эйлера

Мы начнем с очень простого, но довольно поучительного вывода частичной суммы гармонического ряда. Немного далее будет показано, что формула может быть легко уточнена и обобщена на другие суммы.

Идея состоит в том, что при больших значениях  $k$  величина  $\frac{1}{k}$  мало отличается от интеграла  $\int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{1}{x} dx$ . Действительно,

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{k+1/2}{k-1/2} = \ln \left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$

Представляя  $\ln(1+z)$  в виде суммы двух членов ряда Тейлора и остаточного члена, получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{1}{x} dx &= \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(2k)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2k)^3} \left(1 + \frac{\theta_1}{2k}\right)^{-3} - \\ &\quad - \left(-\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(2k)^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(2k)^3} \left(1 - \frac{\theta_2}{2k}\right)^{-3}\right), \end{aligned}$$

где  $0 < \theta_i < 1$ . Следовательно, при  $k > 10$  справедливо соотношение

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} + r_k, \quad \text{где } |r_k| < \frac{1}{8k^3}.$$

Если  $m < n$ , то суммируя эти равенства по  $k$  от  $m+1$  до  $n$ , получаем, что

$$\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=m+1}^n \left( \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{1}{x} dx - r_k \right) = \int_{m+1/2}^{n+1/2} \frac{1}{x} dx - \sum_{k=m+1}^n r_k.$$

Значит,

$$\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} = \ln \left( n + \frac{1}{2} \right) - \ln \left( m + \frac{1}{2} \right) - \sum_{k=m+1}^n r_k.$$

Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , тогда из последнего равенства следует, что

$$S_n = S_m + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} = \ln \left( n + \frac{1}{2} \right) + \left\{ S_m - \ln \left( m + \frac{1}{2} \right) - \sum_{k=m+1}^{\infty} r_k \right\} + \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, не зависит от  $n$ . Кроме того, из полученного равенства видно, что оно не зависит и от  $m$ . Это и есть постоянная Эйлера

$$C = S_m - \ln \left( m + \frac{1}{2} \right) - \sum_{k=m+1}^{\infty} r_k,$$

а

$$S_n = \ln \left( n + \frac{1}{2} \right) + C + \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k.$$

Если  $n > 10$ , то

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k \right| < \frac{1}{8} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{8} \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{x^3} = \frac{1}{8} \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{24n^2},$$

значит,

$$S_n = \ln \left( n + \frac{1}{2} \right) + C + R_n, \quad \text{где } |R_n| < \frac{1}{24n^2}. \quad (4.1)$$

(В частности, теперь легко ответить на вопрос, заданный во введении: что больше:  $Z_1 = S_{2 \cdot 10^{10}} - S_{10^{10}}$  или  $Z_2 = S_{2 \cdot 10^{12}} - S_{10^{12}}$ ?)

Так как при  $n > 10$  справедливо равенство

$$S_{2n} - S_n = \ln \left( \frac{2n + 1/2}{n + 1/2} \right) + \beta_n n^{-2},$$

где  $|\beta_n| < \frac{1}{10}$ , то, следовательно,  $S_{2n} - S_n = \ln 2 - \frac{1}{4n} + \gamma_n n^{-2}$ , где  $|\gamma_n| < 1$ .

Итак,  $Z_2 > Z_1$ , более того,  $Z_2 - Z_1 = \frac{1}{4} 10^{-10} - \frac{1}{4} 10^{-12} + \delta 10^{-20}$ , где  $|\delta| < 2$ .)

В следующих параграфах мы покажем, как с помощью таких же простых соображений получать асимптотики других сумм и рядов, причем с очень большой точностью. Выкладки, по существу, не отличаются от приведенных выше, но, разумеется, более громоздки и могут быть опущены при первом чтении.

## § 5. Вспомогательные оценки

Основная идея вычисления суммы  $\sum_{k=m}^{\infty} \psi(k)$ , как и в предыдущем параграфе, состоит в том, что при больших  $k$ , если  $\psi(x)$  мало меняется, величина  $\psi(k)$  приближается интегралом  $\int_{k-1/2}^{k+1/2} \psi(x) dx$ .

Пусть  $\varphi(x)$  — первообразная функции  $\psi(x)$ , так что

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \psi(x) dx = \int_{k-1/2}^{k+1/2} \varphi'(x) dx = \varphi(k+1/2) - \varphi(k-1/2).$$

Разложим  $\varphi(k+1/2)$  и  $\varphi(k-1/2)$  по формуле Тейлора с остаточным членом:

$$\begin{aligned} \varphi(k+1/2) - \varphi(k-1/2) &= \varphi(k) + \frac{1}{2} \varphi'(k) + \frac{1}{2^2 2!} \varphi''(k) + \frac{1}{2^3 3!} \varphi'''(k) + \\ &+ \frac{1}{2^4 4!} \varphi^{(4)}(k) + \frac{1}{2^5 5!} \varphi^{(5)}(k) + \frac{1}{2^6 6!} \varphi^{(6)}(k) + \frac{1}{2^7 7!} \varphi^{(7)}(k + \theta_1/2) - \\ &- \left[ \varphi(k) - \frac{1}{2} \varphi'(k) + \frac{1}{2^2 2!} \varphi''(k) - \frac{1}{2^3 3!} \varphi'''(k) + \frac{1}{2^4 4!} \varphi^{(4)}(k) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2^5 5!} \varphi^{(5)}(k) + \frac{1}{2^6 6!} \varphi^{(6)}(k) - \frac{1}{2^7 7!} \varphi^{(7)}(k - \theta_2/2) \right]. \end{aligned}$$

Итак,

$$\varphi(k+1/2) - \varphi(k-1/2) = \varphi'(k) + \frac{1}{2^2 3!} \varphi'''(k) + \frac{1}{2^4 5!} \varphi^{(5)}(k) + R_{1,k}, \quad (5.1)$$

где  $R_{1,k} = \frac{1}{2^7 7!} \varphi^{(7)}(k + \theta_1/2) + \frac{1}{2^7 7!} \varphi^{(7)}(k - \theta_2/2)$ . Здесь и далее  $0 < \theta_j < 1$ .

Аналогично,

$$\varphi''(k + 1/2) - \varphi''(k - 1/2) = \varphi'''(k) + \frac{1}{2^2 3!} \varphi^{(5)}(k) + R_{2,k},$$

где  $R_{2,k} = \frac{1}{2^5 5!} \varphi^{(7)}(k + \theta_3/2) + \frac{1}{2^5 5!} \varphi^{(7)}(k - \theta_4/2)$ . Следовательно,

$$\varphi'''(k) = \varphi''(k + 1/2) - \varphi''(k - 1/2) - \frac{1}{2^2 3!} \varphi^{(5)}(k) - R_{2,k}. \quad (5.2)$$

Таким же образом выпишем формулу для пятой производной:

$$\varphi^{(4)}(k + 1/2) - \varphi^{(4)}(k - 1/2) = \varphi^{(5)}(k) + R_{3,k},$$

где  $R_{3,k} = \frac{1}{2^3 3!} \varphi^{(7)}(k + \theta_5/2) + \frac{1}{2^3 3!} \varphi^{(7)}(k - \theta_6/2)$ . Поэтому

$$\varphi^{(5)}(k) = \varphi^{(4)}(k + 1/2) - \varphi^{(4)}(k - 1/2) - R_{3,k}. \quad (5.3)$$

Исключая  $\varphi'''(k)$  и  $\varphi^{(5)}(k)$  из равенств (5.1), (5.2), (5.3), получаем равенство

$$\begin{aligned} \varphi'(k) = \varphi(k + \frac{1}{2}) - \varphi(k - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2^2 3!} \left[ \varphi''(k + \frac{1}{2}) - \varphi''(k - \frac{1}{2}) \right] + \\ + \left[ \frac{1}{2^4 (3!)^2} - \frac{1}{2^4 5!} \right] \left[ \varphi^{(4)}(k + \frac{1}{2}) - \varphi^{(4)}(k - \frac{1}{2}) \right] - R_k, \end{aligned}$$

$$\text{где } R_k = R_{1,k} - \frac{1}{2^2 3!} R_{2,k} + \left[ \frac{1}{2^4 (3!)^2} - \frac{1}{2^4 5!} \right] R_{3,k}.$$

Если  $|\varphi^{(7)}(x)| < m_k$  при  $k - \frac{1}{2} < x < k + \frac{1}{2}$ , то

$$|R_k| < \left( \frac{1}{2^6 \cdot 7!} + \frac{1}{2^6 \cdot 3!5!} + \frac{1}{2^6 \cdot 6^3} \right) m_k < 5 \cdot 10^{-3} m_k.$$

Просуммируем полученные равенства от  $m+1$  до  $n > m$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^n \varphi'(k) = \varphi(n + \frac{1}{2}) - \varphi(m + \frac{1}{2}) - \frac{1}{24} \left[ \varphi''(n + \frac{1}{2}) - \varphi''(m + \frac{1}{2}) \right] + \\ + \frac{7}{5760} \left[ \varphi^{(4)}(n + \frac{1}{2}) - \varphi^{(4)}(m + \frac{1}{2}) \right] - \sum_{k=m+1}^n R_k, \quad (5.4) \end{aligned}$$

где  $|R_k| < 5 \cdot 10^{-3} m_k$ , а  $m_k = \sup |\varphi^{(7)}(x)|$  при  $k - \frac{1}{2} < x < k + \frac{1}{2}$ .



## § 6. Асимптотика частичной суммы гармонического ряда

Здесь мы уточним равенство (4.1). Для этого применим равенство (5.4) к частичным суммам гармонического ряда.

Положим  $\psi(x) = \varphi'(x) = \frac{1}{x}$ , а  $\varphi(x) = \ln x$ . Тогда

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & \varphi'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & \varphi^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4}, \\ \varphi^{(5)}(x) &= \frac{24}{x^5}, & \varphi^{(6)}(x) &= -\frac{120}{x^6}, & \varphi^{(7)}(x) &= \frac{6!}{x^7}.\end{aligned}$$

Подставим эти значения в (5.4):

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} &= \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \ln\left(m + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} \left[ \frac{1}{(n+1/2)^2} - \frac{1}{(m+1/2)^2} \right] - \\ &\quad - \frac{7}{960} \left[ \frac{1}{(n+1/2)^4} - \frac{1}{(m+1/2)^4} \right] - \sum_{k=m+1}^n R_k,\end{aligned}$$

где  $|R_k| < 5 \cdot 10^{-3} \frac{6!}{(k-1)^7}$ .

Если обозначить  $S_n = \sum_{k=1}^n k^{-1}$ , то из этого равенства получается соотношение

$$\begin{aligned}S_n &= \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} \frac{1}{(n+1/2)^2} - \frac{7}{960} \frac{1}{(n+1/2)^4} - \\ &- \left\{ S_m - \ln\left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{24} \frac{1}{(m+1/2)^2} + \frac{7}{960} \frac{1}{(m+1/2)^4} - \sum_{k=m+1}^{\infty} R_k \right\} + \\ &\quad + \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k.\end{aligned}$$

Из полученного равенства видно, что стоящее в фигурных скобках выражение не зависит ни от  $n$ , ни от  $m$ . Это известная постоянная Эйлера (разумеется та же, что и в § 4):

$$\begin{aligned}C &= S_m - \ln\left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{24} \frac{1}{(m+1/2)^2} + \frac{7}{960} \frac{1}{(m+1/2)^4} - \sum_{k=m+1}^{\infty} R_k = \\ &= 0,577\,215\,664\,901\,532\,5\dots,\end{aligned}$$

которая фигурирует во многих математических формулах. Великий Эйлер вычислил ее (конечно, без всяких компьютеров!) более двухсот лет назад.

Так как

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k \right| < 5 \cdot 10^{-3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6!}{(k-1)^7} < 5 \cdot 10^{-3} \frac{5!}{(n-1)^6},$$

то получаем окончательную формулу, уточняющую (4.1):

$$S_n = \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + C + \frac{1}{24} \frac{1}{(n+1/2)^2} - \frac{7}{960} \frac{1}{(n+1/2)^4} + Z_n, \quad (6.1)$$

где

$$|Z_n| < \frac{6}{(n-1)^6} 10^{-1}.$$

Увеличивая число членов в разложении Тейлора функции  $\varphi$ , можно получить формулу, более точную при  $n \rightarrow \infty$  (однако коэффициенты при степенях  $n^{-r}$  катастрофически быстро растут, так что получающийся ряд расходится, как и многие асимптотические ряды.) Тем не менее и формула (6.1) обеспечивает поразительную точность. Уже при  $n = 11$  она гарантирует 6 верных десятичных знаков.<sup>1)</sup>

Конечно, при небольших значениях  $n$  проще непосредственно считать частичную сумму, чем пользоваться формулой (6.1). Но при громадных значениях  $n$  эта формула имеет несомненные преимущества, а главное значение этой формулы проявляется в других теоретических исследованиях.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Даже при  $n = 4$  формула

$$S_n = \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + C + \frac{1}{24} \frac{1}{(n+1/2)^2} - \frac{7}{960} \frac{1}{(n+1/2)^4}$$

дает значение 2,083 332 893, т. е. 7 верных знаков. И уж совсем непостижимо, что эта формула, выведенная и справедливая для больших значений  $n$ , дает хорошее приближение при  $n = 1$  (!):  $S_1 = 0,999\,758\,963$ . Вообще говоря, таких удивительных свойств от асимптотических формул ожидать нельзя (другой такой случай будет показан в следующей главе для  $\Gamma(\lambda)$ ). По-видимому, это связано с аналитическими свойствами исследуемых функций.

<sup>2)</sup> Имеются и другие представления частичных сумм гармонического ряда. Например,  $S_n = \ln n + C + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{n(n+1)\dots(n+k-1)}$ , где

$$A_k = \frac{1}{k} \int_0^1 x(1-x)(2-x)\dots(k-1-x) dx \quad [17].$$

## § 7. О вычислении суммы ряда $S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$

Рассмотрим еще один, не столь важный теоретически, но довольно занятый пример. Речь пойдет о вычислении суммы сходящегося ряда  $S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$ . Этот ряд сходится по интегральному признаку, но чему равна его сумма? Сколько членов ряда надо сложить, чтобы получить 4 верные десятичные значащие цифры в значении суммы  $S$ ? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним простые неравенства (на которых, кстати, основан интегральный признак сходимости рядов.) Если  $f(x)$  — положительная непрерывная монотонно убывающая функция, то  $f(x) < f(k)$  при  $x > k$ , а  $f(x) > f(k)$  при  $x < k$ . Поэтому,

$$\int_k^{k+1} f(x) dx < f(k) < \int_{k-1}^k f(x) dx$$

и при  $n > m$

$$\int_{m+1}^{n+1} f(x) dx < \sum_{k=m+1}^n f(k) < \int_m^n f(x) dx.$$

Следовательно, остаток  $q_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$  рассматриваемого ряда можно оценить снизу:

$$q_m > \int_{m+1}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \frac{1}{\ln(m+1)}.$$

Итак, чтобы получить точность хотя бы  $10^{-3}$  (нетрудно заметить, что  $1 < S < 10$ ) требуется сложить не менее  $m$  членов ряда, где  $\ln(m+1) > 10^3$ .

Следовательно,  $m+1 > \exp(10^3) > 10^{300}$ . Если учесть, что время жизни Вселенной приблизительно равно  $10^{10}$  лет  $< 10^{18}$  секунд, то ясно, что никакие самые фантастические скорости вычисления не обеспечат требуемой точности путем простого сложения членов ряда. Между тем формула (5.4) даст весьма большую точность.

Для этого положим

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1}{\ln x}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}, \quad \varphi''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln^2 x} - \frac{2}{x^2 \ln^3 x}, \\ \varphi'''(x) &= \frac{2}{x^3 \ln^2 x} + \frac{6}{x^3 \ln^3 x} + \frac{6}{x^3 \ln^4 x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4 \ln^2 x} - \frac{22}{x^4 \ln^3 x} - \frac{36}{x^4 \ln^4 x} - \frac{24}{x^4 \ln^5 x}, \\ \varphi^{(5)}(x) &= \frac{24}{x^5 \ln^2 x} + \frac{100}{x^5 \ln^3 x} + \frac{210}{x^5 \ln^4 x} + \frac{240}{x^5 \ln^5 x} + \frac{120}{x^5 \ln^6 x}, \\ \varphi^{(6)}(x) &= -\frac{120}{x^6 \ln^2 x} - \frac{548}{x^6 \ln^3 x} - \frac{1350}{x^6 \ln^4 x} - \frac{2040}{x^6 \ln^5 x} - \frac{1800}{x^6 \ln^6 x} - \frac{720}{x^6 \ln^7 x}, \\ \varphi^{(7)}(x) &= \frac{720}{x^7 \ln^2 x} + \frac{3528}{x^7 \ln^3 x} + \frac{9744}{x^7 \ln^4 x} + \frac{17640}{x^7 \ln^5 x} + \frac{21000}{x^7 \ln^6 x} + \frac{15120}{x^7 \ln^7 x} + \\ &\quad + \frac{5040}{x^7 \ln^8 x}.\end{aligned}$$

Если  $x > 21$ , то  $\ln x > 3$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}|\varphi^{(7)}(x)| &< x^{-7} \left\{ 80 + \frac{5400}{27} + \frac{16200}{81} + \frac{18000}{243} + \frac{21000}{700} + \frac{16000}{2100} + \frac{6000}{6300} \right\} < \\ &< \{89 + 20 + 200 + 90 + 30 + 10 + 1\} x^{-7} < 500x^{-7}.\end{aligned}$$

Поэтому из формулы (5.4) при  $n \rightarrow \infty$  получаем равенство

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k} &= -\varphi\left(m + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} \varphi''\left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{7}{5760} \varphi^{(4)}\left(m + \frac{1}{2}\right) - \\ &\quad - \sum_{k=m+1}^n R_k,\end{aligned}$$

$$|R_k| < 5 \cdot 10^{-3} \cdot 500(k-1)^{-7} = 2,5(k-1)^{-7}.$$

Значит,

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=2}^m \frac{1}{k \ln^2 k} + \frac{1}{\ln(m+1/2)} - \\ &\quad - \frac{1}{24} \left( \frac{1}{(m+1/2)^2 \ln^2(m+1/2)} + \frac{2}{(m+1/2)^2 \ln^3(m+1/2)} \right) + \\ &\quad + \frac{7}{5960} \frac{1}{(m+1/2)^4} \left( \frac{6}{\ln^2(m+1/2)} + \frac{22}{\ln^3(m+1/2)} + \frac{36}{\ln^4(m+1/2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{24}{\ln^5(m+1/2)} \right) + Q_m, \quad (7.1)\end{aligned}$$

где  $|Q_m| < 0,5 \sum_{m=2}^{\infty} k^{-7} < 0,1 m^{-6}$ , если  $m > 20$ .

Подводя итоги, мы видим, что для вычисления суммы ряда  $S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$  достаточно сосчитать сумму первых 20 членов, а сумму оставшихся членов вычислить по только что выведенной формуле. При этом ошибка не будет превышать  $10^{-8}$ . Даже вычисление вручную займет не слишком много времени, а на любом компьютере счет мгновенный. При  $m = 20$  приближенное значение  $S$  по выведенной формуле равно 2,109 742 804, тогда как истинное значение  $S$  равно 2,109 742 801 236 891 97.... Так что истинная ошибка при  $m = 20$  равна  $\approx 3 \cdot 10^{-9}$ , что не сильно отличается от грубой теоретической оценки ошибки. И в этом случае, как и в предыдущем примере, асимптотическая формула (7.1) дает хороший результат при всех значениях  $m$ , даже тех, где априорная теоретическая оценка ошибки неудовлетворительная:  $S_3 = 2,109 774$ ,  $S_2 = 2,109 473$ .

Заметим, что и при  $m = 2$ , т.е. тогда, когда вместо суммы ряда вычисляется один член плюс полученная выше поправка, погрешность оказывается равной  $\approx 3 \cdot 10^{-4}$ , что намного меньше, чем погрешность при простом сложении  $10^{300}$  членов ряда.

## Глава 3

### МЕТОД ЛАПЛАСА

#### § 8. Предварительное исследование интеграла Лапласа

В этой и последующей главах речь пойдет об интегралах

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt, \quad \varphi, h \in C^\infty[a; b], \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (8.1)$$

Функция  $h(t)$  всюду в этой главе считается вещественной, а функция  $\varphi(t)$  может быть и комплекснозначной.

Интеграл (8.1) зависит от параметра нерегулярным образом. Действительно, бесконечность является существенно особой точкой для функции  $\exp(\lambda h(t))$ : она не разлагается в ряд по степеням  $\lambda^{-1}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Интеграл (8.1) также не разлагается в такой ряд. Требуется выяснить, как ведет себя интеграл (8.1) при больших значениях  $\lambda$ .

Легко получить грубую оценку интеграла:

$$|F(\lambda)| \leq (b-a) \max_{[a;b]} |\varphi(t)| \exp \left( \lambda \max_{[a;b]} h(t) \right) = M \exp \left( \lambda \max_{[a;b]} h(t) \right).$$

Оказывается, эта оценка для больших  $\lambda$  довольно точна. Действительно, пусть максимум функции  $h(t)$  достигается в точке  $c$ . Попробуем найти приближенное значение интеграла  $|F(\lambda)|$  исходя из здравого смысла и нестрогих рассуждений.

На рис. 1 и 2 показаны графики подынтегральных функций в случаях, когда максимум функции  $h(t)$  достигается во внутренней точке или в граничной точке (на рис. 1  $\varphi(t) = t^2$ ,  $h(t) = -t^2 + 6t - 9$ ,  $\lambda = 100$ , а на рис. 2  $\varphi(t) = t$ ,  $h(t) = 1 - t - \sin(t - 1)$ ,  $\lambda = 20$ ).

Видно, что основной вклад в интеграл дают лишь значения подынтегральной функции в малой окрестности точки  $c$ . В самом деле, если максимум изолированный (как в примерах на рисунках), то вне малой окрестности  $c$ , т. е. при  $|t - c| > \delta$ , справедливо неравенство  $h(t) < h(c) - \gamma$ ,  $\gamma > 0$ . Поэтому отношение значений подынтегральной

функции при  $|t - c| > \delta$  к значению подынтегральной функции в точке  $c$  не превосходит  $\left| \frac{\varphi(t)}{\varphi(c)} \right| \exp(\lambda h(t) - \lambda h(c)) \leq M \exp(-\lambda \gamma)$ , т. е. экспонен-

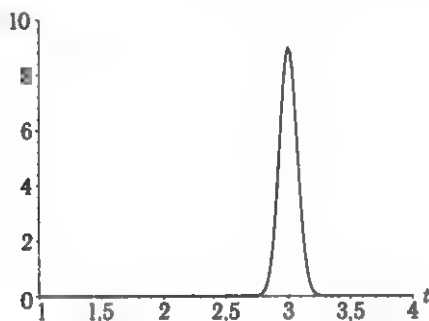


Рис. 1.  $\varphi(t) \exp(\lambda h(t)) = t^2 \exp(100(-t^2 + 6t - 9))$

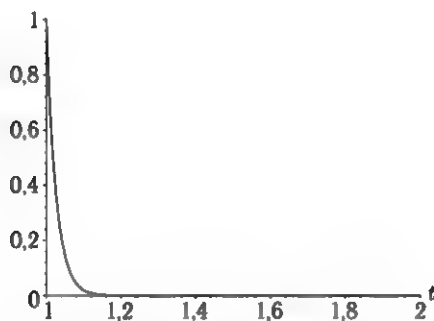


Рис. 2.  $\varphi(t) \exp(\lambda h(t)) = t \exp(20(1 - t - \sin(t - 1)))$

циально мало при больших  $\lambda$ . (Для простоты будем пока предполагать, что  $\varphi(c) \neq 0$ .) Значит, интеграл  $F(\lambda)$  приблизительно равен интегралу по малой окрестности точки  $c$ . В этой окрестности функция  $\varphi(t)$  приблизительно равна  $\varphi(c)$ , функция  $h(t)$  приблизительно равна  $h(c)$ , а диаметр этой окрестности приблизительно равен некоторому числу  $\beta$ , зависящему от  $\lambda$ . Итак,

$$F(\lambda) \approx \beta(\lambda) \varphi(c) \exp(\lambda h(c)).$$

Для завершения этих нестрогих рассуждений осталось найти величину  $\beta(\lambda)$ , т. е. диаметр той окрестности точки  $c$ , в которой подынтегральная функция мало отличается от своего максимального значения. Величина  $\beta(\lambda)$  существенно зависит от поведения функции  $h(t)$  в окрестности точки  $c$ .

Если точка  $c$  лежит на границе (как на рис. 2) и  $h'(c) \neq 0$ , то исконая окрестность такова, что отношение  $\frac{e^{\lambda h(t)}}{e^{\lambda h(c)}} = e^{\lambda(h(t)-h(c))}$  ограничено сверху и снизу положительными постоянными. Это означает, что  $\lambda(h(t) - h(c)) \approx \lambda h'(c)(t - c) = O(1)$  или  $(t - c) = O\left(\frac{1}{\lambda h'(c)}\right)$ . Таким образом,  $\beta(\lambda) \approx |h'(c)\lambda|^{-1}$  и

$$F(\lambda) \approx \frac{B_1}{|h'(c)\lambda|} \varphi(c) \exp(\lambda h(c)). \quad (8.2)$$

Если точка  $c$  внутренняя и  $h''(c) \neq 0$  (как на рис. 1, в этом случае ясно, что  $h'(c) = 0$ ), то в этой окрестности  $|\lambda h(t) - \lambda h(c)| \approx \lambda \frac{|h''(c)|}{2} |t - c|^2$ . Значит, аналогично предыдущему случаю,  $[\beta(\lambda)]^2 \approx \approx 2|h''(c)\lambda|^{-1}$  и

$$F(\lambda) \approx \frac{B_2}{\sqrt{|h''(c)\lambda|}} \varphi(c) \exp(\lambda h(c)). \quad (8.3)$$

Несмотря на значительную нестрогость приведенных выше рассуждений, полученные формулы являются правильными. Ниже в этой главе соотношения (8.2), (8.3) будут строго доказаны, мы получим значения постоянных  $B_1$  и  $B_2$ , более того, будут построены и обоснованы асимптотические приближения интеграла  $F(\lambda)$  с точностью до любой степени  $\lambda^{-1}$ .

## § 9. Максимум показателя $h(t)$ достигается на границе

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 2: максимум функции  $h(t)$  достигается в точке  $a$  (случай, когда максимум достигается на правом конце  $b$ , рассматривается совершенно аналогично). Будем предполагать, что выполнены следующие дополнительные условия:

- 1)  $h'(a) < 0$ ,
- 2) точка  $a$  является единственной точкой максимума функции  $h(t)$  <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Оба условия являются вполне естественными. Условие (1) означает так называемую грубость ситуации, или ситуацию общего положения. Под этим понимается следующее: при малом изменении данных задачи она сохраняет основные черты. Действительно, из того что  $a$  является точкой максимума функции  $h(t)$ , вытекает, что  $h'(a) \leq 0$ . Однако если  $h'(a) = 0$ , то при сколь угодно малом изменении функции  $h(t)$  и всех ее производных точка  $a$  может перестать быть точкой максимума. Например, у функции  $-(t-a)^2$  максимум находится в точке  $a$ , а для функции  $-(t-a)^2 + \varepsilon t$  при сколь угодно малом



В соответствии с предварительными рассуждениями предыдущего параграфа разобьем интеграл  $F(\lambda)$  на два интеграла:  $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$ , где

$$F_1(\lambda) = \int_a^{a+\delta} \varphi(t) \exp(\lambda h(t)) dt, \quad F_2(\lambda) = \int_{a+\delta}^b \varphi(t) \exp(\lambda h(t)) dt.$$

В силу условия (1) выберем достаточно малое  $\delta$  так, чтобы  $h'(t) < 0$  при  $t \in [a; a + \delta]$ .

Из условия (2) вытекает, что при достаточно малом  $\delta$  для некоторого  $\gamma > 0$  на отрезке  $[a + \delta; b]$  справедливо неравенство  $h(t) < h(a) - \gamma$ . Следовательно,

$$|F_2(\lambda)| \leq M \exp(\lambda h(a)) \cdot \exp(-\gamma \lambda).$$

Асимптотика первого интеграла легко получается интегрированием по частям ( $\lambda$  фиксировано):

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} \int_a^{a+\delta} \frac{\varphi(t)}{h'(t)} d \exp(\lambda h(t)) = \frac{1}{\lambda} \frac{\varphi(t)}{h'(t)} \exp(\lambda h(t)) \Big|_a^{a+\delta} - \\ &- \frac{1}{\lambda} \int_a^{a+\delta} \frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi(t)}{h'(t)} \right) \exp(\lambda h(t)) dt = -\frac{1}{\lambda} \frac{\varphi(a)}{h'(a)} \exp(\lambda h(a)) + \\ &+ \frac{1}{\lambda^2} \int_a^{a+\delta} \frac{\varphi_1(t)}{h'(t)} d(\exp(\lambda h(t))) + O(\exp(\lambda h(a))) \cdot \exp(-\gamma \lambda), \end{aligned}$$

$$\text{где } \varphi_1(t) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi(t)}{h'(t)} \right).$$

Продолжая интегрирование по частям, получаем равенство

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &= -\exp(\lambda h(a)) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda^k} \frac{\varphi_{k-1}(a)}{h'(a)} + \frac{1}{\lambda^n} \int_a^{a+\delta} \varphi_n(t) \exp(\lambda h(t)) dt + \\ &+ O(\exp(\lambda h(a))) \cdot \exp(-\gamma \lambda), \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$  точка  $a$  уже не является точкой максимума. Если же  $h'(a) < 0$ , то при любом достаточно малом изменении функции  $h(t)$  и ее первой производной точка  $a$  останется точкой максимума.

То же относится и к условию (2). Если имеется другая точка на отрезке, в которой значение функции  $h(t)$  равно  $h(a)$ , то при малом изменении  $h(t)$  точка  $a$  может перестать быть точкой абсолютного максимума.

где  $\varphi_0(t) = \varphi(t)$ ,  $\varphi_{k+1}(t) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi_k(t)}{h'(t)} \right) \in C^\infty[a; a + \delta]$ . Так как

$$\left| \int_a^{a+\delta} \varphi_n(t) \exp(\lambda h(t)) dt \right| \leq M_n \exp(\lambda h(a)),$$

то из этой оценки и из полученной выше оценки интеграла  $F_2(\lambda)$  следует асимптотическое разложение интеграла  $F(\lambda)$ :

$$F(\lambda) \stackrel{as}{=} -\exp(\lambda h(a)) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \frac{\varphi_{k-1}(a)}{h'(a)}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (9.1)$$

где  $\varphi_0(t) = \varphi(t)$ ,  $\varphi_{k+1}(t) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi_k(t)}{h'(t)} \right)$ .

Выпишем главный член этого разложения:

$$F(\lambda) = \exp(\lambda h(a)) \left[ \frac{1}{\lambda} \frac{\varphi(a)}{|h'(a)|} + O(\lambda^{-2}) \right].$$

Таким образом, в случае когда максимум показателя  $h(t)$  достигается на границе в точке  $a$ , строго обоснована полученная выше из наглядных соображений формула (8.2) (оказалось, что постоянная  $B_1 = 1$ ).

## § 10. Максимум показателя $h(t)$ достигается во внутренней точке. Асимптотика интеграла $F(\lambda)$ в частном случае

Рассмотрим частный случай интеграла  $F(\lambda)$ : пусть  $h(t) = -\frac{t^2}{2}$ , так что максимум функции  $h(t)$  достигается в нуле и эта точка внутренняя, т. е.  $a < 0 < b$ .

Как и ранее, считаем, что функция  $\varphi(t)$  бесконечно дифференцируема на отрезке  $[a; b]$ . Основной вклад в интеграл  $F(\lambda)$  вносят значения функции в окрестности нуля. Поэтому аналогично предыдущему параграфу представим интеграл  $F(\lambda)$  в виде суммы трех интегралов:  $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda)$ , где

$$F_1(\lambda) = \int_a^{-\delta} \varphi(t) \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt, \quad F_2(\lambda) = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t) \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt,$$

$$F_3(\lambda) = \int_{\delta}^b \varphi(t) \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt,$$

а  $\delta > 0$  — некоторое фиксированное малое число.

Обозначим  $\gamma = \frac{\delta^2}{2}$  и укажем оценку первого и третьего интегралов:

$$|F_1(\lambda)| + |F_3(\lambda)| \leq \max_{[a,b]} |\varphi(t)|(b-a)e^{-\lambda \frac{\delta^2}{2}} \leq M e^{-\gamma \lambda}. \quad (10.1)$$

Далее рассмотрим интеграл  $F_2(\lambda)$ , заменив в нем подынтегральную функцию частичной суммой ее ряда Тейлора и остаточным членом:

$$\begin{aligned} F_2(\lambda) &= \int_{-\delta}^{\delta} \left[ \varphi(0) + t\varphi'(0) + \dots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} \varphi^{(2n)}(0) + \rho_{2n}(t) \right] \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \int_{-\delta}^{\delta} t^k \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt + r_n, \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$\text{где } r_n = \int_{-\delta}^{\delta} \rho_{2n}(t) \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt, \quad |\rho_{2n}(t)| \leq M|t|^{2n+1}.$$

Остаточный член  $r_n$  можно легко оценить:

$$|r_n| \leq \int_{-\delta}^{\delta} M|t|^{2n+1} \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt < M \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{2n+1} \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt.$$

После замены переменной  $t = \frac{\tau}{\sqrt{\lambda}}$  получаем оценку

$$|r_n| < M \frac{1}{\lambda^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2n+1} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau = \frac{M_1}{\lambda^{n+1}}. \quad (10.3)$$

**Замечание.** Здесь и в дальнейшем мы будем обозначать через  $M$ , возможно с индексами, различные величины, не зависящие от параметра, по которому строится асимптотическое разложение.

Далее надо исследовать интегралы в равенстве (10.2). После замены  $t = \frac{\tau}{\sqrt{\lambda}}$  получаем равенство

$$F_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k! \lambda^{(k+1)/2}} \int_{-\delta\sqrt{\lambda}}^{\delta\sqrt{\lambda}} \tau^k \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right).$$

При нечетных  $k$  интегралы  $\int_{-\delta\sqrt{\lambda}}^{\delta\sqrt{\lambda}} \tau^k \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau$  равны нулю. Следовательно,

$$F_2(\lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)! \lambda^{(2k+1)/2}} \int_{-\delta\sqrt{\lambda}}^{\delta\sqrt{\lambda}} \tau^{2k} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right). \quad (10.4)$$

Фигурирующие здесь интегралы в пределах  $(-\delta\sqrt{\lambda}, \delta\sqrt{\lambda})$  мало отличаются от таких же интегралов в пределах  $(-\infty, \infty)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta\sqrt{\lambda}}^{\delta\sqrt{\lambda}} \tau^{2k} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2k} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau \right| &= \\ &= 2 \int_{\delta\sqrt{\lambda}}^{\infty} \tau^{2k} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau < M \exp\left(-\delta^2 \lambda / 4\right) \end{aligned}$$

при больших значениях  $\lambda$ .

Ясно, что  $\exp(-\delta^2 \lambda / 4) = O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)$ . Поэтому из равенства (10.4) и из оценки (10.1) вытекает равенство

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)! \lambda^{k+\frac{1}{2}}} A_k + O(\lambda^{-n-1}), \quad (10.5)$$

где  $A_k = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2k} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau$ .

Для вывода окончательной формулы осталось лишь вычислить постоянные  $A_k$ :

$$A_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = \sqrt{2\pi}, \quad A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau d e^{-\frac{\tau^2}{2}} = A_0.$$

Интегрируя таким же способом по частям, легко получить общую формулу для  $A_k$ :

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2k+2} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2k+1} d e^{-\frac{\tau^2}{2}} = \\ &= (2k+1) \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2k} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = (2k+1) A_k. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_2 = 3A_0, \quad A_3 = 5A_2 = 5 \cdot 3A_0, \quad \dots$$

$$\dots, \quad A_k = 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1)A_0 = (2k-1)!! A_0.$$

Теперь можно немного упростить коэффициенты в формуле (10.5):

$$\frac{A_k}{(2k)!} = \frac{A_0(2k-1)!!}{(2k)!} = \frac{A_0}{(2k)!!} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^k k!}.$$

Окончательная формула асимптотики интеграла в рассмотренном частном случае ( $a < 0 < b$ ) имеет следующий вид:

$$\int_a^b \varphi(t) e^{-\lambda \frac{t^2}{2}} dt \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{2^k k!}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (10.6)$$

## § 11. Максимум показателя $h(t)$ достигается во внутренней точке. Общий случай

Рассмотрим теперь интеграл

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt,$$

где  $\varphi(t) \in C^\infty[a, b]$ ,  $h(t) \in C^\infty[a, b]$  в случае, когда единственный максимум показателя  $h(t)$  достигается во внутренней точке  $c \in (a, b)$ . Ясно, что  $h'(c) = 0$ ,  $h''(c) \leq 0$ . Будем предполагать выполненными два условия:

1)  $h''(c) < 0$ .

2) точка  $c$  является единственной точкой максимума функции  $h(t)$ .

Так же как и в § 9, эти условия характеризуют случай общего положения или грубой ситуации, т.е. ситуации, устойчивой к малым возмущениям.

Как и ранее, представим интеграл  $F(\lambda)$  в виде суммы трех интегралов:

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda),$$

где

$$F_1(\lambda) = \int_a^{c-\delta} \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt, \quad F_2(\lambda) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt,$$

$$F_3(\lambda) = \int_{c+\delta}^b \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt,$$

а  $\delta$  — такое достаточно малое положительное число, что  $h''(t) < 0$  и  $h(t) < h(c) - \gamma$  при  $t \notin [c - \delta; c + \delta]$ ,  $\gamma > 0$ . Ясно, что такие  $\delta > 0$  и  $\gamma > 0$  существуют в силу условий (1) и (2).

Как и выше, дадим оценку интегралам  $F_1(\lambda)$  и  $F_3(\lambda)$ , они опять-таки экспоненциально малы по отношению к интегралу  $F_2(\lambda)$  (по крайней мере в том случае, когда функция  $\varphi(t)$  или хотя бы одна из ее производных не равны нулю в точке  $c$ ):

$$\begin{aligned} |F_1(\lambda)| + |F_3(\lambda)| &= \\ &= \exp(\lambda h(c)) \left( \left| \int_a^{c-\delta} \varphi(t) e^{\lambda(h(t)-h(c))} dt \right| + \left| \int_{c+\delta}^b \varphi(t) e^{\lambda(h(t)-h(c))} dt \right| \right) \leq \\ &\leq M \exp(\lambda h(c)) e^{-\lambda \gamma}. \quad (11.1) \end{aligned}$$

Осталось лишь найти асимптотику интеграла  $F_2(\lambda)$ . Ввиду условия (1) поведение показателя  $h(t)$  с точностью до слагаемого, до сдвига аргумента и до постоянного множителя точно такое же, как и у функции  $-\frac{t^2}{2}$ , рассмотренной в предыдущем параграфе. Поэтому обозначим  $F_2(\lambda) = \exp(\lambda h(c)) G(\lambda)$  и сведем изучение асимптотики интеграла  $G(\lambda)$  к изучению асимптотики частного случая интеграла из § 10.

$$\text{Итак, } G(\lambda) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} \varphi(t) e^{\lambda(h(t)-h(c))} dt. \text{ После замены переменной } t = x + c \text{ имеем}$$

$$G(\lambda) = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x+c) e^{\lambda(h(x+c)-h(c))} dx.$$

Теперь осталось лишь сделать такую замену переменной  $x \Leftrightarrow z$ , чтобы выполнялось равенство

$$h(x+c) - h(c) = -\frac{z^2}{2}. \quad (11.2)$$

Для того чтобы применять формулу (10.6), замена переменной, конечно, должна быть бесконечно дифференцируемым диффеоморфизмом, т.е. функция  $z(x)$  и обратная функция  $x(z)$  должны быть бесконечно дифференцируемыми. Поэтому нельзя сделать замену  $z(x) = \sqrt{2(h(c) - h(x+c))}$ , казалось бы естественно вытекающую из соотношения (11.2). Такая функция не является биекцией в окрестности нуля и даже не имеет первой производной. Правильной заменой

переменной, которая даст возможность свести задачу к рассмотренному выше частному случаю, является замена

$$z(x) = x \sqrt{2 \frac{h(c) - h(x+c)}{x^2}}. \quad (11.3)$$

Так определенная функция  $z(x)$  является бесконечно дифференцируемой на отрезке  $[-\delta; \delta]$ , и выполняется соотношение (11.2). Действительно, справедливо равенство

$$h(x+c) - h(c) = \int_0^x (x-\xi) h''(\xi+c) d\xi. \quad ^1)$$

После замены переменной интегрирования  $\xi = x\theta$  получаем равенство

$$h(x+c) - h(c) = x^2 \int_0^1 (1-\theta) h''(x\theta+c) d\theta,$$

так что замена переменной (11.3) имеет следующий вид:

$$z(x) = x \sqrt{2 \int_0^1 (1-\theta) [-h''(x\theta+c)] d\theta}. \quad (11.4)$$

В силу выбора числа  $\delta$  подкоренное выражение всюду положительно и бесконечно дифференцируемо. Следовательно, бесконечно дифференцируемой является и функция  $z(x)$ . Более того,

$$\frac{dz}{dx}(0) = \sqrt{2 \int_0^1 (1-\theta) [-h''(c)] d\theta} = \sqrt{[-h''(c)]} > 0.$$

Поэтому  $\frac{dz}{dx}(x) > 0$  всюду для достаточно малых  $x$ , т.е. в малой окрестности точки  $x = 0$ . Упомянутое выше малое число  $\delta$  можно считать настолько малым, чтобы было выполнено неравенство  $\frac{dz}{dx}(x) > 0$  при  $x \in [-\delta; +\delta]$ . Таким образом в интеграле  $G(\lambda)$  допустима замена (11.4), которая является гладким диффеоморфизмом.

<sup>1)</sup> Это известная формула Ньютона. Впрочем, ее легко проверить непосредственно: формула справедлива, так как вторые производные левой и правой частей совпадают, а значения левой и правой частей и значения их первых производных при  $x = 0$  равны нулю.

Пусть  $x(z)$  — функция, обратная к функции  $z(x)$ , определенной формулой (11.4). Интеграл  $G(\lambda)$  приобретает следующий вид:

$$G(\lambda) = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \varphi(x(z) + c) e^{-\lambda \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{dz} dz,$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — некоторые положительные числа. Этот интеграл в точности имеет вид, рассмотренный в предыдущем параграфе, и для него справедлива формула (10.6) с заменой функции  $\varphi(t)$  на функцию

$$\psi(z) = \varphi(x(z) + c) \frac{dx}{dz}(z).$$

Если учесть оценки (11.1), то окончательная формула приобретает вид

$$\int_a^b \varphi(t) e^{-\lambda h(t)} dt \stackrel{\text{as}}{=} \exp(\lambda h(c)) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \frac{\psi^{(2k)}(0)}{2^k k!}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (11.5)$$

где  $\psi(z) = \varphi(x(z) + c) \frac{dx}{dz}(z)$ , а функция  $x(z)$  — функция, обратная к функции  $z(x)$ , определенной формулой (11.4).

Выпишем отдельно главный член асимптотики.

Так как  $\psi(0) = \varphi(c) \frac{dx}{dz}(0)$ , а  $\frac{dx}{dz}(0) = \left(\frac{dz}{dx}(0)\right)^{-1} = |h''(c)|^{-1/2}$ , то

$$\int_a^b \varphi(t) e^{-\lambda h(t)} dt \stackrel{\text{as}}{=} \varphi(c) \exp(\lambda h(c)) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |h''(c)|}} \left[1 + O(\lambda^{-1})\right]. \quad (11.6)$$

Таким образом, и в случае когда максимум показателя  $h(t)$  достигается во внутренней точке, обоснована полученная из нестрогих соображений формула (8.3) (оказалось, что постоянная  $B_2 = \sqrt{2\pi}$ ). Более того, как и в § 9, получено асимптотическое разложение интеграла с точностью до любой степени параметра  $\lambda^{-1}$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Асимптотику интеграла  $G(\lambda)$  можно получить другим способом. Для этого надо представить показатель в виде суммы главного члена  $\lambda \frac{h''(c)}{2} x^2$  и остальных членов ряда Тейлора функции  $\lambda(h(x+c) - h(c))$ :

$$\begin{aligned} \lambda(h(x+c) - h(c)) &= \lambda \frac{h''(c)}{2} x^2 + \lambda \tau(x), \\ \tau(x) &= \sum_{k=3}^n a_k x^k + O(x^{n+1}). \end{aligned}$$

Множитель  $\exp\left(\lambda \frac{h''(c)}{2} x^2\right)$  является определяющим — он обеспечивает малость подынтегральной функции при  $x \gg \lambda^{-1/2}$ , а функцию  $\exp(\lambda \tau(x))$  следует разложить в ряд.



Итак, пусть  $h''(c)/2 = -\mu^2$ , тогда

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x+c) e^{\lambda(h(x+c)-h(c))} dx = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x+c) e^{-\lambda\mu^2 x^2} e^{\lambda r(x)} dx = \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \left[ \sum_{i=0}^{3n+2} \varphi_i x^i + O(x^{3n+3}) \right] e^{-\lambda\mu^2 x^2} \left[ 1 + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda r(x)^j}{j!} + O((\lambda x^3)^{n+1}) \right] dx = \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \left[ \sum_{0 \leq 3j \leq i \leq 3n} \tilde{\varphi}_{i,j} x^i \lambda^j + O(\lambda^{n+1} x^{3n+3}) \right] e^{-\lambda\mu^2 x^2} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{0 \leq 3j \leq i \leq 3n} \tilde{\varphi}_{i,j} x^i \lambda^j + O(\lambda^{n+1} x^{3n+3}) \right] e^{-\lambda\mu^2 x^2} dx + O(e^{-\lambda\delta^2\mu^2/2}). \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi_i$  — коэффициенты разложения функции  $\varphi(x+c)$  в ряд Тейлора в точке  $x=0$ , а  $\tilde{\varphi}_{i,j}$  получаются из  $\varphi_i$  и  $a_k$  после возведения в степень  $\left( \sum_{k=3}^n a_k x^k + O(x^{n+1}) \right)^j$ , перемножения соответствующих сумм и приведения подобных членов.

Например,  $\tilde{\varphi}_{0,0} = \varphi_0$ ,  $\tilde{\varphi}_{3,1} = \varphi_3 + \varphi_0 a_3$ .

Если сделать замену переменной интегрирования  $x = \frac{\tau}{\mu\sqrt{\lambda}}$ , то получим асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{0 \leq 3j \leq i \leq 3n} \tilde{\varphi}_{i,j} x^i \lambda^j + O(\lambda^{n+1} x^{3n+3}) \right] e^{-\lambda\mu^2 x^2} dx + \\ &+ O(e^{-\lambda\delta^2\mu^2/2}) = \lambda^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{0 \leq 3j \leq i \leq 3n} \tilde{\varphi}_{i,j} \frac{\tau^i \lambda^j}{\mu^i \lambda^{i/2}} + \right. \\ &\left. + O(\lambda^{n+1} \frac{\tau^{3n+3}}{\mu^{3n+3} \lambda^{(3n+3)/2}}) \right] e^{-\tau^2} d\tau + O(e^{-\lambda\delta^2\mu^2/2}) = \\ &= \lambda^{-1/2} \sum_{0 \leq 3j \leq i \leq 3n} \lambda^{j-i/2} \tilde{\varphi}_{i,j} \frac{1}{\mu^i \lambda^{i/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^i e^{-\tau^2} d\tau + O(\lambda^{-(n-2)/2}). \end{aligned}$$

Наконец, учитывая, что  $\int_{-\infty}^{+\infty} \tau^{2k+1} e^{-\tau^2} d\tau = 0$ , получим

$$G(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} \lambda^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{-k}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

После умножения на  $\exp(\lambda h(c))$  получается асимптотическая формула для  $\int_a^b \varphi(t) e^{-\lambda h(t)} dt$ , которая в силу единственности асимптотического разложения должна совпадать с формулой (11.5).

**З а м е ч а н и е 2.** Выше всюду для простоты изложения предполагалось, что функции  $h(t)$  и  $\varphi(t)$  бесконечно дифференцируемы. Все рассуждения и доказательства полностью сохраняются, если предположить, что эти функции имеют лишь конечное число непрерывных производных в окрестности точки  $c$ . В этом случае вместо бесконечного асимптотического ряда получается так называемое асимптотическое представление интеграла, т.е. конечная сумма с правильной оценкой достаточно малого остаточного члена. Чем больше гладкость функций  $h(t)$  и  $\varphi(t)$ , тем больше членов асимптотики можно получить в этом представлении.

## § 12. Асимптотика гамма-функции Эйлера

Рассмотрим построение асимптотики интеграла на примере гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\lambda-1} dt. \quad (12.1)$$

Этот несобственный интеграл сходится на бесконечности при любом комплексном значении  $\lambda$ . Для сходимости в нуле необходимо и достаточно, чтобы  $\Re \lambda > 0$ . Известно, что  $\Gamma(\lambda)$  — аналитическое продолжение интеграла (12.1) на комплексную плоскость — является мероморфной функцией с полюсами первого порядка в нуле и в точках  $-n$ , где  $n$  — натуральные числа (см., например: *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950, гл. 7, § 4).

Здесь мы рассмотрим лишь асимптотику  $\Gamma(\lambda)$  при действительном  $\lambda \rightarrow \infty$ . Технически немного удобнее рассматривать  $\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\lambda} dt$ .

С первого взгляда непонятно, как применить к этому интегралу метод Лапласа. Прежде всего, это интеграл несобственный, а не интеграл по конечному отрезку. Важнее то обстоятельство, что если попытаться свести задачу к рассмотренному выше случаю первым пришедшим в голову способом:  $\varphi(t) = e^{-t}$ ,  $t^{\lambda} = \exp(\lambda \ln t)$ , так что  $h(t) = \ln t$ , то показатель  $h(t)$  не будет иметь максимума и вообще будет неограничен как в нуле, так и на бесконечности. Правильнее представить интеграл

в виде

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t+\lambda \ln t} dt.$$

Новый показатель  $-t + \lambda \ln t$  более сложным образом зависит от  $\lambda$ , но зато принимает максимальное значение при  $t = \lambda$ . Поэтому естественно перенести начало координат в точку  $\lambda$  и провести сжатие вдоль оси абсцисс, т. е. сделать замену переменной  $t = \lambda(1 + s)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda + 1) &= \lambda \int_{-1}^{\infty} \exp[-\lambda(1 + s) + \lambda \ln \lambda + \lambda \ln(1 + s)] ds = \\ &= \lambda e^{\lambda \ln \lambda} \int_{-1}^{\infty} \exp[-\lambda(1 + s) + \lambda \ln(1 + s)] ds = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_{-1}^{\infty} e^{\lambda h(s)} ds, \end{aligned}$$

где  $h(s) = -s + \ln(1 + s)$ . Теперь уже к интегралу  $F(\lambda) = \int_{-1}^{\infty} e^{\lambda h(s)} ds$

можно применить метод Лапласа, а

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} F(\lambda).$$

Функция  $h(s)$  имеет единственный максимум в нуле и небольшое отличие  $F(\lambda)$  от интеграла, рассмотренного в § 11, состоит лишь в том, что интеграл  $F(\lambda)$  несобственный как при  $s = -1$ , так и на бесконечности. Но теперь это уже не является существенным препятствием, так как интегралы по областям вне окрестности нуля сходятся и экспоненциально малы.

Чтобы показать это, заметим прежде всего, что  $h(s)$  — это выпуклая кверху функция, монотонно возрастающая при  $s < 0$  и монотонно убывающая при  $s > 0$ .

Действительно,  $h'(s) = -1 + \frac{1}{1+s}$ ,  $h''(s) = -\frac{1}{(1+s)^2} < 0$ . Поэтому

$$\int_{-1}^{-1/2} e^{\lambda h(s)} ds < \frac{1}{2} e^{\lambda h(-1/2)} = M \exp(-\gamma \lambda), \quad \gamma > 0.$$

Так как при  $s \geq 1$  функция  $h(s)$  не превосходит линейной функции  $h(1) + (s-1)h'(1)$ , то

$$\int_1^{\infty} e^{\lambda h(s)} ds < \int_1^{\infty} e^{\lambda[h(1) + (s-1)h'(1)]} ds = e^{\lambda h(1)} \frac{1}{\lambda |h'(1)|} = M_1 \exp(-\gamma_1 \lambda),$$

$\gamma_1 > 0$ .

Асимптотика  $\int_{-1/2}^1 e^{\lambda h(s)} ds$  получена в предыдущем параграфе (теперь  $\varphi(t) \equiv 1$ ,  $c = 0$ ,  $h(0) = 0$ ). Так как

$$\left| \int_{-1}^{-1/2} e^{\lambda h(s)} ds \right| + \left| \int_1^{\infty} e^{\lambda h(s)} ds \right| = O(\lambda^{-N}) \quad \forall N,$$

то согласно формуле (11.5)

$$F(\lambda) \cong \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \frac{\psi^{(2k)}(0)}{2^k k!}, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

где  $\psi(z) = \frac{ds}{dz}(z)$ , а функция  $s(z)$  — это функция, обратная функции  $z(s) = s \sqrt{-2 \frac{h(s)}{s^2}}$ .

Для того чтобы получить явные численные значения коэффициентов  $\psi^{(2k)}(0) = \frac{d^{2k+1}}{dz^{2k+1}} \Big|_{z=0}(0)$ , можно воспользоваться многократным дифференцированием тождества  $h(s(z)) \equiv -\frac{z^2}{2}$ :

$$h'(s(z))s'(z) \equiv -z, \quad h''(s(z))(s'(z))^2 + h'(s(z))s''(z) \equiv -1,$$

$$h'''(s(z))(s'(z))^3 + 3h''(s(z))s'(z)s''(z) + h'(s(z))s'''(z) \equiv 0,$$

$$h^{(4)}(s(z))(s'(z))^4 + 6h'''(s(z))(s'(z))^2s''(z) + 4h''(s(z))s'(z)s'''(z) + \\ + 3h''(s(z))(s''(z))^2 + h'(s(z))s^{(4)}(z) \equiv 0.$$

Так как  $h'(s) = -1 + \frac{1}{1+s}$ ,  $h^{(k)}(s) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+s)^k}$  при  $k > 1$ , то подставляя в выписанные тождества последовательно значения производных  $h^{(k)}(0)$  и учитывая, что  $s(0) = 0$ ,  $s'(0) > 0$ , получаем равенства

$$-(s'(0))^2 = -1, \quad 2(s'(0))^3 - 3s'(0)s''(0) = 0,$$

$$-6(s'(0))^4 + 6 \cdot 2(s'(0))^2s''(0) - 4s'(0)s'''(0) - 3(s''(0))^2 = 0.$$

Отсюда следует, что  $s'(0) = 1$ ,  $s''(0) = \frac{2}{3}$ ,  $s'''(0) = \frac{1}{6}$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda + 1) &= \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} F(\lambda) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left(1 + \frac{1}{12\lambda} + O(\lambda^{-2})\right) = \\ &= \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \sqrt{2\pi\lambda} \left(1 + \frac{1}{12\lambda} + O(\lambda^{-2})\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Так как для натуральных  $n$  справедливо равенство  $\Gamma(n + 1) = n!$ , то, в частности,

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тем самым получено уточнение известной формулы Стирлинга, которая используется для больших  $n$ :

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Можно получить и более точные формулы. Для этого достаточно продолжить вычисление коэффициентов формулы путем дальнейшего последовательного дифференцирования выписанных выше тождеств.

Вместо этого мы продемонстрируем метод, упомянутый в Замечании 1.

Так как

$$h(s) = -\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \frac{s^5}{5} - \frac{s^6}{6} + \frac{s^7}{7} - \frac{s^8}{8} + \frac{s^9}{9} + O(s^{10}) = -\frac{s^2}{2} + r(s),$$

то

$$\begin{aligned}F(\lambda) &= \int_{-1/2}^1 e^{\lambda h(s)} ds + O(e^{-\gamma\lambda}) = \\ &= \int_{-1/2}^1 e^{-\lambda \frac{s^2}{2}} \left[1 + \sum_{k=1}^7 \frac{[\lambda r(s)]^k}{k!} + O(\lambda^8 s^{24})\right] ds + O(e^{-\gamma\lambda}).\end{aligned}$$

Как пояснялось выше, пределы интегрирования  $(-1/2, 1)$  можно заменить на  $-\infty$  и  $\infty$ , при этом произойдет изменение интеграла лишь на экспоненциально малые члены. Далее следует произвести замену независимой переменной  $s = \frac{\tau}{\sqrt{\lambda}}$ .

Итак,

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \left[1 + \sum_{k=1}^7 \frac{[\lambda r(\tau/\sqrt{\lambda})]^k}{k!} + O(\lambda^{-4} \tau^{24})\right] d\tau + O(e^{-\gamma\lambda}).$$

При дальнейших вычислениях следует учесть, что интегралы от нечетных степеней аргумента, умноженных на  $e^{-\tau^2/2}$ , равны нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \left( 1 - \frac{\tau^4}{4\lambda} - \frac{\tau^6}{6\lambda^2} - \frac{\tau^8}{8\lambda^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau^3}{3\lambda^{1/2}} - \frac{\tau^4}{4\lambda} + \frac{\tau^5}{5\lambda^{3/2}} - \frac{\tau^6}{6\lambda^2} + \frac{\tau^7}{7\lambda^{5/2}} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left( \frac{\tau^3}{3\lambda^{1/2}} - \frac{\tau^4}{4\lambda} + \frac{\tau^5}{5\lambda^{3/2}} - \frac{\tau^6}{6\lambda^2} \right)^3 + \frac{1}{24} \left( \frac{\tau^3}{3\lambda^{1/2}} - \frac{\tau^4}{4\lambda} + \frac{\tau^5}{5\lambda^{3/2}} \right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{120} \left( \frac{\tau^3}{3\lambda^{1/2}} - \frac{\tau^4}{4\lambda} \right)^5 + \frac{1}{720} \frac{\tau^{18}}{3^6 \lambda^3} \right) d\tau + O(\lambda^{-4}) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \left( 1 - \frac{\tau^4}{4\lambda} - \frac{\tau^6}{6\lambda^2} - \frac{\tau^8}{8\lambda^3} + \frac{\tau^6}{18\lambda} + \frac{\tau^8}{15\lambda^2} + \frac{\tau^{10}}{21\lambda^3} + \frac{\tau^8}{32\lambda^2} + \frac{\tau^{10}}{24\lambda^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau^{10}}{50\lambda^3} - \frac{\tau^{10}}{72\lambda^2} - \frac{\tau^{12}}{108\lambda^3} - \frac{\tau^{12}}{60\lambda^2} - \frac{\tau^{12}}{384\lambda^3} + \frac{\tau^{12}}{24 \cdot 3^4 \lambda^2} + \frac{\tau^{14}}{30 \cdot 27\lambda^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau^{14}}{36 \cdot 16\lambda^3} - \frac{\tau^{16}}{96 \cdot 81\lambda^3} + \frac{\tau^{18}}{720 \cdot 729\lambda^3} \right) d\tau + O(\lambda^{-4}) = \\ &= A_0 + \lambda^{-1} \left( -\frac{A_2}{4} + \frac{A_3}{18} \right) + \lambda^{-2} \left( -\frac{A_3}{6} + \frac{A_4}{15} + \frac{A_4}{32} - \frac{A_5}{72} + \frac{A_6}{1944} \right) + \\ &+ \lambda^{-3} \left( -\frac{A_4}{8} + \frac{A_5}{21} + \frac{A_5}{24} + \frac{A_5}{50} - \frac{A_6}{108} - \frac{A_6}{60} - \frac{A_6}{384} + \frac{A_7}{810} + \frac{A_7}{576} - \frac{A_8}{96 \cdot 81} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_9}{720 \cdot 729} \right) + O(\lambda^{-4}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где, как и раньше, обозначено

$$A_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \tau^{2k} d\tau, \quad A_0 = \sqrt{2\pi}, \quad A_k = (2k-1)!! A_0.$$

Подставляя в полученную формулу значения  $A_k$ , приходим к следующему приближенному значению:

$$\Gamma(\lambda+1) = \left( \frac{\lambda}{e} \right)^{\lambda} \sqrt{2\pi\lambda} \left( 1 + \frac{1}{12\lambda} + \frac{1}{288\lambda^2} - \frac{139}{51840\lambda^3} + O(\lambda^{-4}) \right),$$

$$\lambda \rightarrow \infty.$$

Полученная асимптотика является дальнейшим уточнением формулы Стирлинга. Интересно, что даже простая формула  $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$  дает хорошее приближение (с точностью до 5%) уже для  $n = 2$ . А приведенная выше формула дает совсем замечательный результат (с точностью до 0,2%) уже при  $n = 1$ .

В табл. 1 приведены численные значения, полученные по приближенным формулам.

Таблица 1

$n$	$n!$	$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$	$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3}\right)$
1	1	0,922	0,99898
2	2	1,919	1,999985484
3	6	5,836	5,999998569
4	24	23,506	24,00000348
5	120	118,019	120,0000141
6	720	710,078	720,0000555
7	5040	4980,396	5040,000252
8	40320	39902,396	40320,00134
9	362880	359536,873	362880,0083
10	3628800	3598695,624	3628800,059

Другая асимптотическая формула для функции  $\Gamma(z)$  выводится более сложным путем. Она приведена, например, в справочнике: *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962, и имеет следующий вид:

$$\ln \Gamma(z) \stackrel{\text{as}}{=} z \ln z - z - \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} z^{-2k+1},$$

следовательно,

$$n! \stackrel{\text{as}}{=} \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} (n+1)^{-2k+1},$$

где  $B_{2k}$  — числа Бернулли:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30},$$

$$B_{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k+1} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2k)!}{(2j)!(2k+1-2j)!} B_{2j}, \quad k > 2.$$

Эти числа очень быстро растут при увеличении  $k$ . Поэтому все выписанные выше асимптотические ряды расходятся, и значит, ни в коем случае для приближенных вычислений нельзя неограниченно увеличивать номер частичной суммы. Но, как всегда, частичные суммы ряда дают хорошее приближение для достаточно больших значений  $n$ . А в данном случае, как показывает табл. 2, даже два члена асимптотики дают хорошее приближение для всех значений  $n$ .

Таблица 2

$n$	$n!$	$\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \left(\exp\left(\frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{360(n+1)^3}\right)\right)$
0	1	0,999494 216 6
1	1	0,999978 749 2
2	2	1,999993 944
3	6	5,999995 555
4	24	23,999994 09
5	120	119,999988 2
6	720	719,999967 5
7	5040	5039,999887
8	40320	40319,99952
9	362880	362879,9976
10	3628800	3628799,988

Совершенно удивительно, что формула, полученная для достаточно больших значений  $n$ , дает замечательно точное значение даже для  $n = 0$  (с точностью 0,05 %)!



## Глава 4

### МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

В этой главе также будут рассмотрены интегралы, зависящие от параметра нерегулярным образом. Это снова интеграл

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda h(t)} dt, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \varphi, h \in C^\infty[a; b],$$

но теперь, в отличие от предыдущей главы, функция  $h(t)$  принимает не вещественные, а чисто мнимые значения. Так что удобнее записать этот интеграл в виде

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda i S(t)} dt, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

где  $S(t)$  — вещественная функция. По аналогии с физическими и, в частности, с электротехническими приложениями функция  $S(t)$  называется фазой, а функция  $\varphi(t)$  — амплитудой. Будем считать, что  $\varphi, S \in C^\infty[a; b]$ .

Поведение подынтегральной функции в рассматриваемом здесь случае резко отличается от поведения подынтегральной функции предыдущей главы. Если там она имела  $\delta$ -образный вид и была сосредоточена вблизи точки максимума функции  $S(t)$ , то здесь  $|e^{\lambda i S(t)}| = 1$  и значения функции как бы равномерно распределены по отрезку. Тем не менее оказывается, что и в этом случае решающую роль в асимптотике функции  $F(\lambda)$  играют точки, в которых производная  $S'(t) = 0$ , т. е. стационарные точки функции  $S(t)$ . Отсюда происходит и название метода — метод стационарной фазы.

График функции  $\Re e[\varphi(t) e^{\lambda i S(t)}] = \varphi(t) \cos[\lambda S(t)]$  при  $\varphi(t) = 1 + 0,3t^2$ ,  $S(t) = t + t^2$ ,  $\lambda = 60$ , представлен на рис. 3.

Здесь производная функции  $S(t)$  нигде не равна нулю, и подынтегральная функция быстро осциллирует. Как будет показано ниже, интеграл  $F(\lambda)$  в этом случае стремится к нулю как  $\lambda^{-1}$ .

Если же на отрезке  $[a; b]$  существуют стационарные точки, то, вообще говоря, интеграл  $F(\lambda)$  стремится к нулю как  $\lambda^{-1/2}$ . Именно так

обстоит дело для функции  $(t^2 + 10)e^{600i(2t^2 - t^3 - t)}$ , график вещественной части которой показан на рис. 4.

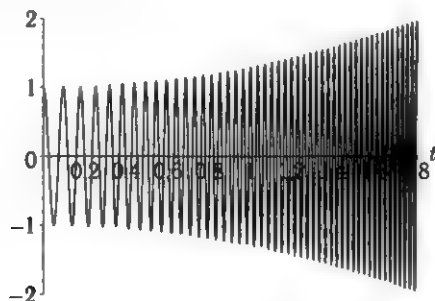


Рис. 3.  $(1 + 0,3t^2) \cos [60(t + t^2)]$

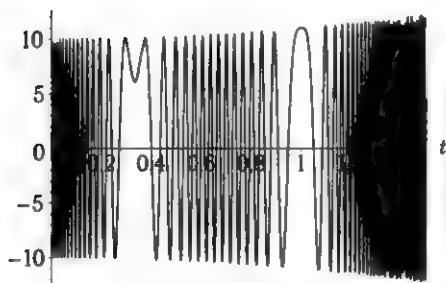


Рис. 4.  $(t^2 + 10) \cos [600(2t^2 - t^3 - t)]$

Здесь основной вклад в интеграл вносят окрестности стационарных точек  $t = 1$  и  $t = 1/3$ .

### § 13. Асимптотика интеграла при отсутствии стационарных точек

**Теорема 13.1.** Пусть

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda i S(t)} dt, \quad \varphi, S \in C^\infty[a; b], \quad (13.1)$$

где  $S(t)$  вещественная и  $S'(t) \neq 0$ . Тогда

$$F(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{A_k}{\lambda^k} e^{\lambda i S(a)} + \frac{B_k}{\lambda^k} e^{\lambda i S(b)} \right], \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (13.2)$$

Коэффициенты  $A_k$  являются линейными комбинациями значений функции  $\varphi(t)$  и ее производных до порядка  $k-1$  в точке  $a$ , коэффициенты  $B_k$  являются линейными комбинациями значений функции  $\varphi(t)$  и ее производных до порядка  $k-1$  в точке  $b$ .

В частности, если функция  $\varphi(t)$  и все ее производные равны нулю в точке  $a$ , то все  $A_k$  равны нулю.

Доказательство сразу вытекает из интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_a^b \frac{\varphi(t)}{i\lambda S'(t)} de^{\lambda i S(t)} = \frac{\varphi(t)}{i\lambda S'(t)} e^{\lambda i S(t)} \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{\varphi(t)}{i\lambda S'(t)} \right)' e^{\lambda i S(t)} dt = \\ &= \frac{\varphi(b)}{i\lambda S'(b)} e^{\lambda i S(b)} - \frac{\varphi(a)}{i\lambda S'(a)} e^{\lambda i S(a)} + \frac{1}{i\lambda} \int_a^b \varphi_1(t) e^{\lambda i S(t)} dt, \end{aligned}$$

$$\text{где } \varphi_1(t) = - \left( \frac{\varphi(t)}{S'(t)} \right)'.$$

Применяя интегрирование по частям к последнему интегралу и затем последовательно применяя ту же процедуру к вновь получаемым интегралам, приходим к равенству

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\varphi_{k-1}(b)}{(i\lambda)^k S'(b)} e^{\lambda i S(b)} - \frac{\varphi_{k-1}(a)}{(i\lambda)^k S'(a)} e^{\lambda i S(a)} \right] + R_n(t),$$

где

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \frac{1}{(i\lambda)^n} \int_a^b \varphi_{n+1}(t) e^{\lambda i S(t)} dt, \\ \varphi_0(t) &= \varphi(t), \quad \varphi_{k+1}(t) = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi_k(t)}{S'(t)} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$|R_n(t)| \leq \frac{1}{\lambda^n} \int_a^b |\varphi_{n+1}(t) e^{\lambda i S(t)}| dt \leq \frac{M_n}{\lambda^n},$$

то отсюда вытекает соотношение (13.2). ▼

## § 14. Асимптотика интеграла в частном случае

Найдем асимптотику интеграла (13.1) в частном случае:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{t^2}{2}, \quad a < 0 < b, \\ F(\lambda) &= \int_a^b \varphi(t) \exp \left( i\lambda \frac{t^2}{2} \right) dt, \quad \varphi \in C^\infty[a; b]. \end{aligned}$$

(Здесь и всюду далее под  $C^\infty[a; b]$  понимается, как обычно, множество бесконечно дифференцируемых на отрезке  $[a; b]$  функций и, кроме того, финитных на этом отрезке, т. е. тождественно равных нулю в окрестности точек  $a$  и  $b$ .)

При этих условиях можно считать функцию  $\varphi(t)$  продолженной нулем на всю ось с сохранением ее бесконечной дифференцируемости, тем самым

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt, \quad \varphi \in C^\infty[-\infty; \infty].$$

Как и в предыдущем случае, удобно получать асимптотику интеграла при  $\lambda \rightarrow \infty$ , интегрируя по частям:

$$F(\lambda) = - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\varphi(t)}{i\lambda t} \right)' \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Внеинтегральные члены, конечно, отсутствуют, так как функция  $\varphi(t)$  финитна.

Однако выписанное выше равенство, вообще говоря, лишено смысла: если  $\varphi(0) \neq 0$ , то в правой части равенства стоит расходящийся интеграл. Это равенство имеет смысл лишь в том случае, когда  $\varphi(0) = 0$ . Поэтому представим функцию  $\varphi(t)$  в виде:  $\varphi(t) = (\varphi(t) - \varphi(0)) + \varphi(0)$ . Таким образом,

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda),$$

где

$$F_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t) - \varphi(0)) \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt,$$

$$F_2(\lambda) = \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Первый интеграл представим в следующем виде:

$$F_1(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \frac{d}{dt} \left( \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) \right) dt,$$

где  $\psi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$ . Так как  $\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \varphi'(\xi) d\xi$ , то после замены

$\xi = t\theta$  получаем, что  $\psi(t) = \int_0^1 \varphi'(t\theta) d\theta$  — бесконечно дифференци-

руемая функция. Таким образом, в интеграле  $F_1(\lambda)$  можно провести интегрирование по частям:

$$F_1(\lambda) = -\frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(t) \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Внеинтегральные члены отсутствуют, так как  $\psi(t) = O(t^{-1})$  при  $|t| \rightarrow \infty$ , а вновь полученный интеграл абсолютно и равномерно сходится, поскольку  $\psi'(t) = O(t^{-2})$  при  $|t| \rightarrow \infty$ .

Если ввести обозначение

$$\varphi_1(t) = -\psi'(t) = -\frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi'(t\theta) d\theta = -\int_0^1 \theta \varphi''(t\theta) d\theta,$$

то первый интеграл приобретает следующий вид:

$$F_1(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Интеграл от второго слагаемого явно вычисляется после замены переменной интегрирования  $t = s\sqrt{\frac{2}{\lambda}}$ :

$$\begin{aligned} F_2(\lambda) &= \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt = \varphi(0) \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(is^2) ds = \\ &= \varphi(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i\pi/4). \quad ^1) \end{aligned}$$

---

<sup>1)</sup> Как известно, интеграл Френеля  $\int_0^{\infty} \exp(is^2) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(i\pi/4)$ .

Проще всего убедиться в справедливости этого равенства сведением к интегралу Пуассона после формальной замены переменной  $s = z \exp(i\pi/4)$ ,  $ds = \exp(i\pi/4) dz$ , в результате которой

$$\int_0^{\infty} \exp(is^2) ds = \int_0^{\infty} \exp(-z^2) dz \exp(i\pi/4) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(i\pi/4).$$

Несмотря на правильность результата, такой вывод, конечно, неправилен, так как новая переменная  $z$  не является вещественной и получившийся после замены интеграл не является интегралом по вещественной прямой.

Для того чтобы сделать вывод строгим, достаточно рассмотреть функцию  $\exp(-z^2)$  на комплексной плоскости. Согласно теореме Коши интеграл по замкнутому контуру, по границе криволинейного треугольника  $\{z: |z| < R, 0 < \arg z < \pi/4\}$ , равен нулю. Следовательно,  $I_{1,R} + I_{2,R} + I_{3,R} = 0$ ,

Итак,  $F(\lambda) = \varphi(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i\pi/4) + \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt$ , где

$$\varphi_1(t) = -\frac{d}{dt} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = -\int_0^1 \theta \varphi''(t\theta) d\theta.$$

Второй интеграл имеет тот же вид, что и первоначальный интеграл  $F(\lambda)$ , и к нему можно применить ту же процедуру. Тем самым

$$F(\lambda) = \varphi(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i\pi/4) + \varphi_1(0) \frac{1}{i\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i\pi/4) + \frac{1}{(i\lambda)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t) \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt,$$

$$\text{где } \varphi_2(t) = -\int_0^1 \theta \varphi_1''(t\theta) d\theta.$$

Продолжая этот процесс далее, получаем следующую формулу:

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i\pi/4) \left[ \sum_{k=0}^n \varphi_k(0) \frac{1}{(i\lambda)^k} + \frac{1}{(i\lambda)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n+1}(t) \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt \right], \quad (14.1)$$

$$\text{где } \varphi_0(t) = \varphi(t), \quad \varphi_{k+1}(t) = -\frac{d}{dt} \frac{\varphi_k(t) - \varphi_k(0)}{t} = -\int_0^1 \theta \varphi_k''(t\theta) d\theta.$$

где  $I_{1,R} = \int_0^R \exp(-x^2) dx$ ,  $I_{2,R} = \int_0^{\pi/4} \exp[-R \exp(i\theta)]^2 i R \exp(i\theta) d\theta$ ,  $I_{3,R} = -\int_0^R \exp(-[\rho \exp(i\pi/4)]^2) \exp(i\pi/4) d\rho$ . Интеграл  $I_{1,R} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  при  $R \rightarrow \infty$ ,  $I_{3,R} = -\int_0^R \exp(-i\rho^2) d\rho \exp(i\pi/4)$ . Так как  $|I_{2,R}| \leq \int_0^{\pi/4} \exp[-R^2 \cos 2\theta] R d\theta = O(R^{-1})$ , то  $\int_0^{\infty} \exp(-i\rho^2) d\rho \exp(i\pi/4) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , откуда и вытекает выписанное выше равенство для интеграла Френеля.

Из явного вида функций  $\varphi_k(t)$  вытекает, что все они бесконечно дифференцируемы и  $|\varphi_k(t)| \leq \frac{M_k}{1+t^2}$ .

Так как последний член суммы (14.1) легко оценивается:

$$\left| \frac{1}{(i\lambda)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n+1}(t) \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_{n+1}}{1+t^2} dt,$$

то в соответствии с определением асимптотического ряда

$$F(\lambda) \stackrel{\text{as}}{=} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i\pi/4) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(0) \frac{1}{(i\lambda)^k}.$$

Для получения окончательной формулы следует определить явные выражения постоянных  $\varphi_k(0)$  через функцию  $\varphi(t)$  и ее производные.

После дифференцирования равенства  $\varphi_{k+1}(t) = - \int_0^1 \theta \varphi_k''(t\theta) d\theta$  полу-

чаем соотношение  $\frac{d^m}{dt^m} \varphi_{k+1}(t) = - \int_0^1 \theta^{m+1} \varphi_k^{(m+2)}(t\theta) d\theta$ . Следовательно,

$$\varphi_{k+1}^{(m)}(0) = - \frac{1}{m+2} \varphi_k^{(m+2)}(0).$$

Последовательно применяя это равенство, получаем

$$\varphi_1(0) = -\frac{1}{2} \varphi''(0), \quad \varphi_2(0) = -\frac{1}{2} \varphi_1''(0) = \frac{1}{2 \cdot 4} \varphi^{(4)}(0),$$

$$\varphi_3(0) = -\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varphi^{(6)}(0), \quad \dots, \quad \varphi_k(0) = (-1)^k \frac{1}{(2k)!!} \varphi^{(2k)}(0).$$

Таким образом, окончательная формула имеет следующий вид: при  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\int_a^b \varphi(t) \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt \stackrel{\text{as}}{=} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i\pi/4) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(2k)}(0) \frac{i^k}{2^k k! \lambda^k}. \quad {}^1) \quad (14.2)$$

<sup>1)</sup> Интересно заметить, что формально это соотношение можно получить из формулы (10.6) гл. 3. Если в интеграле сделать замену переменной  $t = y \exp(i\pi/4)$ , то получим равенство

$$\int_a^b \varphi(t) \exp\left(i\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt = e^{i\pi/4} \int_{a_1}^{b_1} \varphi(y e^{i\pi/4}) e^{-\lambda \frac{y^2}{2}} dy.$$

Так как  $\frac{d^{2k} \varphi(y e^{i\pi/4})}{dy^{2k}} \Big|_{y=0} = \frac{d^{2k} \varphi(t)}{dt^{2k}} \Big|_{t=0} i^k$ , то, применяя к полученному интегралу формулу (10.6), приходим к формуле (14.2). Разумеется, такой вывод логически порочен, так как после замены переменных вещественный отрезок

## § 15. Асимптотика интеграла в случае одной стационарной точки

Найдем асимптотику интеграла (13.1) при следующих дополнительных условиях:

$$\varphi \in C^0[a; b], \quad S \in C^\infty[a; b], \quad S'(c) = 0, \quad S''(t) > 0.$$

При этих условиях можно считать функцию  $\varphi(t)$  продолженной нулем на всю ось с сохранением ее бесконечной дифференцируемости, тем самым

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \exp(i\lambda S(t)) dt, \quad \varphi \in C^0(-\infty, \infty). \quad (15.1)$$

Исследование этого интеграла можно, так же как и в § 11, свести к частному случаю путем замены переменной интегрирования  $t = x + c$ ,  $x \Leftrightarrow z$ .

$$z(x) = x \sqrt{2 \frac{S(x+c) - S(c)}{x^2}}. \quad (15.2)$$

Как было показано,

$$S(x+c) - S(c) = \int_0^x (x-\xi) S''(\xi+c) d\xi = x^2 \int_0^1 (1-\theta) S''(x\theta+c) d\theta,$$

значит, так определенная функция

$$z(x) = x \sqrt{2 \int_0^1 (1-\theta) [S''(x\theta+c)] d\theta}$$

является бесконечно дифференцируемой на отрезке  $[a; b]$  и выполняется соотношение

$$S(x+c) - S(c) = \frac{z^2}{2}. \quad (15.3)$$

Так как по условию  $S'(c) = 0$ ,  $S''(t) > 0$ , то  $S'(t) > 0$  при  $t > c$  и  $S'(t) < 0$  при  $t < c$ . Из равенства (15.2) следует, что  $xz(x) > 0$  при  $x \neq 0$ .

Интегрирования  $[a; b]$  переходит в отрезок  $[a_1; b_1]$  на комплексной плоскости и применение формулы (10.6) незаконно. Тем не менее, как мы видим, ответ правильный, он строго обоснован для финитной функции  $\varphi$ . Причина получения такого удивительно правильного результата при некорректной операции будет ясна после рассмотрения в следующей главе метода перевала. А пока стоит еще отметить, что формула (14.2) неверна, если функция  $\varphi$  не является финитной, а следовательно, и приведенный выше нестрогий вывод в самом деле непригоден. Правильная формула будет получена в § 15.



А из тождества  $S'(x+c) \frac{dx}{dz}(x) \equiv z$  вытекает, что  $\frac{dx}{dz}(x) > 0$  при  $x \neq 0$ . Кроме того,

$$\frac{dz}{dx}(0) = \sqrt{2 \int_0^1 (1-\theta)[S''(c)] d\theta} = \sqrt{[S''(c)]} > 0.$$

Поэтому  $\frac{dz}{dx}(t) > 0$  всюду на отрезке  $[a; b]$ . Таким образом, замена (15.2) является гладким диффеоморфизмом. Пусть  $x(z)$  — это функция, обратная функции  $z(x)$ , определенной формулой (15.2). Интеграл  $F(\lambda)$  приобретает следующий вид:

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x(z) + c) e^{i\lambda \frac{z^2}{2}} \frac{dx}{dz} dz.$$

Этот интеграл имеет в точности вид, рассмотренный в предыдущем параграфе, и для него справедлива формула (14.2) с заменой функции  $\varphi(t)$  на функцию  $\psi(z) = \varphi(x(z) + c) \frac{dx}{dz}(z)$ . Таким образом, при  $\lambda \rightarrow \infty$  справедлива формула

$$\int_a^b \varphi(t) \exp(i\lambda S(t)) dt \stackrel{\text{as}}{=} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i\pi/4) e^{i\lambda S(c)} \sum_{k=0}^{\infty} \psi^{(2k)}(0) \frac{i^k}{2^k k! \lambda^k}. \quad (15.4)$$

**З а м е ч а н и е 1.** Случай, когда  $S''(t) < 0$ , легко сводится к рассмотренному выше путем перехода к комплексно-сопряженным функциям. Пусть  $S''(t) < 0$ , а  $F(\lambda)$  — это интеграл (15.1). Тогда  $\overline{F(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)} \exp(-i\lambda S(t)) dt$ , где верхняя черта означает символ комплексного сопряжения. Для этого интеграла справедлива формула (15.4) (с заменой  $S(t)$  на  $(-S(t))$  и  $\varphi(t)$  на  $\overline{\varphi(t)}$ ). Поэтому

$$\overline{F(\lambda)} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i\pi/4) e^{-i\lambda S(c)} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\psi^{(2k)}(0)} \frac{i^k}{2^k k! \lambda^k},$$

где  $\psi(z) = \varphi(x(z) + c) \frac{dx}{dz}(z)$ , а функция  $x(z)$  — это функция, обратная функции  $z(x) = x \sqrt{2 \frac{S(c) - S(x+c)}{x^2}}$ . Переходя к комплексно-сопряженным значениям, получаем равенство

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(-i\pi/4) e^{i\lambda S(c)} \sum_{k=0}^{\infty} \psi^{(2k)}(0) \frac{(-i)^k}{2^k k! \lambda^k}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (15.5)$$

Так как в обоих случаях  $\psi(0) = \frac{\varphi(c)}{\sqrt{|S''(c)|}}$ , то главный член асимптотики равен

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i\pi/4) \frac{\varphi(c)}{\sqrt{|S''(c)|}} e^{i\lambda S(c)}, \quad \text{если } S''(c) > 0,$$

и

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(-i\pi/4) \frac{\varphi(c)}{\sqrt{|S''(c)|}} e^{i\lambda S(c)}, \quad \text{если } S''(c) < 0.$$

**З а м е ч а н и е 2.** Формально можно получить асимптотику интеграла (13.1) тем же способом, который описан в замечании 1 § 10. Для этого надо провести сдвиг аргумента  $t = x + c$  и представить показатель  $i\lambda S(t)$  в виде суммы главного члена  $i\lambda S(c) + i\lambda \frac{S''(c)}{2} x^2$  и остальных членов ряда Тейлора функции  $i\lambda(S(x+c) - S(c))$ :  $\lambda(S(x+c) - S(c)) = \lambda \frac{S''(c)}{2} x^2 + \lambda r(x)$ . Функции  $\exp(\lambda r(x))$  и  $\varphi(x+c)$  следует разложить в ряды Тейлора. Получившийся ряд будет содержать интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} x^k \exp(i\lambda \gamma^2 x^2) dx$ . Выписав формальные значения этих интегралов как производных по  $\lambda$  от интегралов типа интегралов Френеля, получим асимптотическую формулу (15.4).

Конечно, все эти действия незаконны, но дают правильный ответ. Почему так происходит, можно понять, изучив метод перевала, который будет рассмотрен в следующей главе.

## § 16. Асимптотика интеграла в общем случае

Рассмотрим общий случай интеграла (13.1)

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda S(t)} dt.$$

Как и ранее, будем предполагать фазу вещественной и бесконечно дифференцируемой, а амплитуду тоже будем считать бесконечно дифференцируемой, но необязательно финитной. Существенным предположением является следующее: фаза  $S(t)$  имеет на интервале  $(a; b)$  конечное число стационарных точек  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , т. е. точек, в которых  $S'(c_k) = 0$ . На концах отрезка  $S'(t) \neq 0$  и, главное,  $S''(c_k) \neq 0$ .

Как и при рассмотрении метода Лапласа, эти ограничения означают, что рассматривается ситуация общего положения. А при нарушении этих ограничений асимптотика интеграла имеет, вообще говоря, совсем другой вид.

При таких ограничениях исследование асимптотики по существу сводится к применению случаев, уже разобранных выше в § 13 и в § 15. Однако надо действовать чуть более аккуратно, чем в случае вещественного показателя экспоненты (метод Лапласа). Если для вещественного показателя достаточно было рассмотреть только малую окрестность точки максимума, а интеграл по остальному множеству оказывался пренебрежимо малым, то в данном случае все обстоит немного сложнее. Интеграл по любому подмножеству отрезка  $[a; b]$  от функции  $\varphi(t) \exp(i\lambda S(t))$  не допускает грубой оценки, так как  $|\exp(i\lambda S(t))| = 1$  для любого  $t$ . Более того, эти интегралы хотя и стремятся к нулю при  $\lambda \rightarrow \infty$ , но, вообще говоря, не слишком быстро, а как  $O(\lambda^{-1})$ .

Для того чтобы получить асимптотику с точностью до любой степени  $\lambda$ , применим известный и весьма полезный метод так называемого разбиения единицы. В рассматриваемом здесь одномерном случае (метод на самом деле используется в самых разнообразных пространствах: в евклидовом, нормированном, метрическом и даже в топологическом) он состоит в следующем.

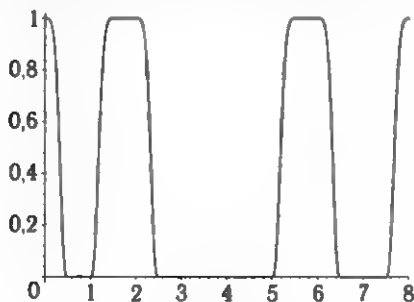
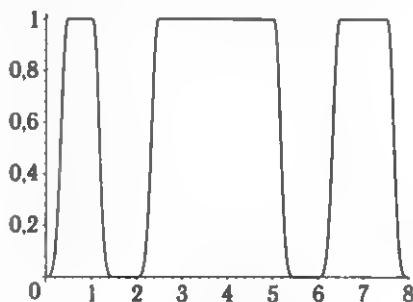
Для единства обозначений положим  $c_0 = a$ , а  $c_{m+1} = b$ . Посредством  $\sigma_k$  обозначим достаточно малые окрестности точек  $c_k$  ( $\sigma_k = \{t: |t - c_k| < 2\delta\}$ ), а посредством  $\beta_k$  — окрестности точек  $c_k$  меньшего радиуса ( $\beta_k = \{t: |t - c_k| < \delta\}$ ). Радиус  $\delta$  считается настолько малым, что окрестности  $\sigma_k$  не пересекаются.

Пусть  $\omega_k(t) \geq 0$  — это такие бесконечно дифференцируемые функции, что  $\omega_k(t) \equiv 0$  при  $|t - c_k| \geq 2\delta$  и  $\omega_k(t) \equiv 1$  при  $|t - c_k| \leq \delta$ .<sup>1)</sup>

Разбиение единицы состоит в том, что функция, тождественно равная единице, представляется в виде суммы бесконечно дифференцируемых функций специального вида. Здесь в качестве части этих функций рассматриваются  $\omega_k(t)$ . Легко видеть, как устроены остальные функции.

<sup>1)</sup> Функции  $\omega_k(t)$  могут быть построены разными способами. Один из способов следующий. Пусть  $g(z)$  — какая-нибудь функция из  $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ , такая что  $g(z) \geq 0$ ,  $g(z)$  равна 0 при  $z \leq 0$  и равна 1 при  $z \geq 1$ . Можно, например, положить  $g(z) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{2z-1}{z(1-z)} \right) \right)$  при  $0 < z < 1$ ,  $g(z) \equiv 0$  при  $z \leq 0$ ,  $1 \leq z$ . Положим  $h(z) = g(z+2)g(2-z)$ . Ясно, что  $h(z) \equiv 0$  при  $|z| \geq 2$  и  $h(z) \equiv 1$  при  $|z| \leq 1$ . Тогда искомыми функциями будут  $\omega_k(t) = h\left(\frac{t-c_k}{\delta}\right)$ .

На отрезке  $[a; c_1]$  положим  $\nu_0(t) \equiv 1 - \omega_0(t) - \omega_1(t)$ , на отрезке  $[c_1; c_2]$  положим  $\nu_1(t) \equiv 1 - \omega_1(t) - \omega_2(t)$  и т. д., на отрезке  $[c_m; b]$  положим  $\nu_m(t) \equiv 1 - \omega_m(t) - \omega_{m+1}(t)$ . Из такого построения видно, что  $\sum_{k=0}^{m+1} \omega_k(t) + \sum_{k=0}^m \nu_k(t) \equiv 1$ , функции  $\nu_k(t)$  бесконечно дифференцируемы и каждая из функций  $\nu_k(t)$  при  $1 \leq k \leq m$  тождественно равна нулю вне отрезка  $[c_k + \delta; c_{k+1} - \delta]$ . Ниже показаны примерные графики функций  $\omega_k(t)$  и  $\nu_k(t)$  при  $m = 2$ .

Рис. 5.  $\omega_k(t)$ Рис. 6.  $\nu_k(t)$ 

Итак, запишем интеграл (13.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda i S(t)} \cdot 1 \, dt = \int_a^b \varphi(t) \left( \sum_{k=0}^{m+1} \omega_k(t) + \sum_{k=0}^m \nu_k(t) \right) e^{\lambda i S(t)} \, dt = \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \int_a^b \varphi(t) \omega_k(t) e^{\lambda i S(t)} \, dt + \sum_{k=0}^m \int_a^b \varphi(t) \nu_k(t) e^{\lambda i S(t)} \, dt. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл (13.1) представлен в виде суммы нескольких интегралов, для каждого из которых асимптотика уже исследована. Радиус  $\delta$  окрестностей точек  $c_k$  можно считать настолько малым, что  $S''(t)$  не меняет знака там, где  $\omega_k(t) \neq 0$ . Поэтому для каждого интеграла  $\int_a^b \varphi(t) \omega_k(t) e^{\lambda i S(t)} \, dt$  при  $1 \leq k \leq m-1$  справедлива либо асимптотика (15.4), либо асимптотика (15.5), в зависимости от знака  $S''(c_k)$ .

Любой из интегралов  $\int_a^b \varphi(t) \nu_k(t) e^{\lambda i S(t)} \, dt$  стремится к нулю быстрее любой степени  $\frac{1}{\lambda}$ , так как на малой окрестности носителя функции

$\varphi(t)\nu_k(t)$  (т. е. на множестве, где эта гладкая функция не равна нулю) производная  $S'(t) \neq 0$  и можно применить формулу (13.2). При этом все  $A_k$  и  $B_k$  равны нулю.

Наконец, асимптотики  $\int_a^b \varphi(t)\omega_0(t)e^{\lambda i S(t)} dt$  и  $\int_a^b \varphi(t)\omega_{m+1}(t)e^{\lambda i S(t)} dt$  исследованы в § 13. Так как на носителях функций  $\varphi(t)\omega_0(t)$  и  $\varphi(t)\omega_{m+1}(t)$  производная  $S'(t) \neq 0$ , то для этих интегралов справедливы формулы (13.2). Поскольку на одном из концов отрезка амплитуда и все ее производные равны нулю, то в формуле асимптотики первого интеграла присутствуют лишь значения амплитуды и ее производных в точке  $t = a$ , а для второго интеграла присутствуют лишь значения амплитуды и ее производных в точке  $t = b$ .

Тем самым построена полная асимптотика интеграла с точностью до любой степени  $\frac{1}{\lambda}$ . Окончательную довольно громоздкую формулу выписывать не будем, но отметим, что во всех случаях значения функций  $\varphi(t)\omega_k(t)$  и их производных в стационарных точках  $c_k$  и на концах отрезка  $[a; b]$  заменяются на такие же значения функций  $\varphi(t)$ , так как в этих точках функции  $\omega_k(t)$  равны единице, а все их производные равны нулю.

Если ограничиться лишь асимптотикой с точностью до  $O(\lambda^{-3/2})$ , то получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda S(t)} dt = & \sum_{k=1}^m \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp\left(i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign}(S''(c_k))\right) \frac{\varphi(c_k)}{\sqrt{|S''(c_k)|}} e^{i\lambda S(c_k)} + \\ & + \frac{\varphi(b)}{i\lambda S'(b)} e^{\lambda i S(b)} - \frac{\varphi(a)}{i\lambda S'(a)} e^{\lambda i S(a)} + O(\lambda^{-3/2}). \end{aligned} \quad (16.1)$$

## § 17. Асимптотика функции Бесселя

В качестве примера применения метода стационарной фазы рассмотрим асимптотическое поведение функции Бесселя при больших значениях аргумента. Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \sin t - int) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эта функция называется функцией Бесселя первого рода порядка  $n$  и обозначается  $J_n(x)$ . Она является одной из самых применяемых в различных приложениях. Из явного вида функции следует, что  $J_n(x)$  для всех целых  $n$  является аналитической функцией  $x$  на всей комплексной плоскости.

Проверим, что  $J_n(x)$  удовлетворяет так называемому уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) u = 0. \quad (17.1)$$

Ясно, что достаточно проверить выполнение уравнения для  $u(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{(ix \sin t - int)} dt$ :

$$\frac{du}{dx} = \int_{-\pi}^{\pi} i \sin t \cdot \exp(ix \sin t - int) dt,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \cdot \exp(ix \sin t - int) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 t - 1) \cdot \exp(ix \sin t - int) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{ix} e^{-int} \frac{d}{dt} \left( \exp(ix \sin t) \right) dt - u(x) = \\ &= -\frac{1}{ix} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \sin t) \frac{d}{dt} (\cos t \cdot e^{-int}) dt - u(x). \end{aligned}$$

При интегрировании по частям внеинтегральные члены отсутствуют, так как подынтегральная функция периодична с периодом  $2\pi$ . Продолжая интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{1}{ix} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \sin t) (\sin t \cdot e^{-int} + in \cos t e^{-int}) dt - u(x) = \\ &= -\frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \frac{n}{x} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \sin t) \cos t e^{-int} dt - u(x) = \\ &= -\frac{1}{x} \frac{du}{dx} - u(x) + \frac{n}{x} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-int}}{ix} \frac{d}{dt} \exp(ix \sin t) dt = \\ &= -\frac{1}{x} \frac{du}{dx} - u(x) - \frac{n}{x} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \sin t) d\left(\frac{e^{-int}}{ix}\right) = -\frac{1}{x} \frac{du}{dx} - u(x) + \frac{n^2}{x^2} u. \end{aligned}$$

Проверка закончена.

Для вычисления асимптотики интеграла

$$u(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \sin t - int) dt \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

применим метод стационарной фазы.

Здесь  $\varphi(t) = e^{-int}$ ,  $S(t) = \sin t$ . Стационарные точки — это точки, в которых  $S'(t) = \cos t = 0$ . Следовательно, на отрезке  $[-\pi; \pi]$  имеются две такие точки:  $c_1 = -\frac{\pi}{2}$  и  $c_2 = \frac{\pi}{2}$  и  $S''(c_1) = 1 > 0$ , а  $S''(c_2) = -1 < 0$ . Следовательно, согласно формуле (16.1)

$$\begin{aligned} u(x) &= \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \varphi(c_1) \exp(ixS(c_1)) + \\ &+ \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \varphi(c_2) \exp(ixS(c_2)) + O(x^{-3/2}) = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left( \exp\left(i\frac{\pi}{4} + in\frac{\pi}{2} - ix\right) + \exp\left(-i\frac{\pi}{4} - in\frac{\pi}{2} + ix\right) \right) + \\ &+ O(x^{-3/2}) = 2\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}). \end{aligned}$$

В асимптотике данного интеграла отсутствуют члены, соответствующие вкладу концов отрезка, так как подынтегральная функция периодична с периодом  $2\pi$  и эти члены, получающиеся в формуле (16.1) после интегрирования по частям, взаимно сокращаются.

Итак,

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (17.2)$$

Методом, указанным в § 15, можно вычислить в явном виде все остальные члены асимптотического разложения функции  $J_n(x)$ . Но такие вычисления крайне громоздки.

Ниже, в гл. 6 будет указан способ очень простого вычисления всех членов асимптотики  $J_n(x)$ , основанный на том, что эта функция является решением уравнения Бесселя (17.1).

## Глава 5

### МЕТОД ПЕРЕВАЛА

#### § 18. Предварительное исследование интеграла

В этой главе будет рассмотрен интеграл более общего вида, чем в двух предыдущих главах:

$$F(\lambda) = \int_{L_{AB}} \varphi(z) e^{\lambda h(z)} dz. \quad (18.1)$$

Здесь  $z$  — это комплексная переменная, а интеграл берется по кусочно гладкой кривой  $L_{AB}$ , лежащей в некоторой области  $\Omega$  комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и соединяющей точки  $A$  и  $B$ . Предполагается, что  $\varphi(z)$  и  $h(z)$  — аналитические функции в области  $\Omega$ , и требуется, как и в предыдущих главах, найти асимптотику интеграла  $F(\lambda)$  при вещественном  $\lambda \rightarrow \infty$ . Без ограничения общности можно считать функции  $\varphi(z)$  и  $h(z)$  аналитическими в замыкании области  $\Omega$ , немного уменьшив ее в случае необходимости.

Легко получить очень грубую оценку интеграла  $F(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} |F(\lambda)| &\leq M \max_{z \in L_{AB}} |\exp(\lambda h(z))| = M \max_{z \in L_{AB}} \exp(\lambda \cdot \Re h(z)) = \\ &= M \exp\left(\lambda \cdot \max_{z \in L_{AB}} \Re h(z)\right), \end{aligned}$$

где постоянная  $M$  равна произведению длины кривой  $L_{AB}$  на максимум модуля амплитуды  $\varphi(z)$  по  $\bar{\Omega}$  — замыканию области  $\Omega$ .

Вообще говоря, эта оценка очень далека от истинного значения интеграла  $F(\lambda)$ . Главная составляющая этой оценки — экспоненциальный множитель  $\exp\left(\lambda \max_{z \in L_{AB}} \Re h(z)\right)$ . Нетрудно заметить, что (так же, как и при исследовании в гл. 3) основной вклад в интеграл дает окрестность точки  $z_0$ , в которой достигается максимум  $\Re h(z)$  — вещественной части  $h(z)$  (если этот максимум строгий, как в гл. 3, а не равен тождественно нулю, как в методе стационарной фазы в гл. 4).



Основная идея метода перевала (по-видимому, этот метод впервые был применен физиком Дебаем в 1909 г.: *Debye P. // Math. Ann. 1909. Bd. 67. S. 535–558*) состоит в следующем простом замечании. Согласно теореме Коши интеграл по замкнутой кривой от аналитической функции (при соблюдении некоторых простых ограничений) равен нулю. Поэтому интеграл  $F(\lambda)$  равен интегралу от той же подынтегральной функции по любой другой кривой, соединяющей точки  $A$  и  $B$  (разумеется, при тех же простых ограничениях: кусочно гладкие кривые  $L_{AB}$  и  $\tilde{L}_{AB}$  лежат в области  $\Omega$  и все точки внутри контура, составленного из этих двух кривых, тоже принадлежат  $\Omega$ ). Следовательно, заменяя

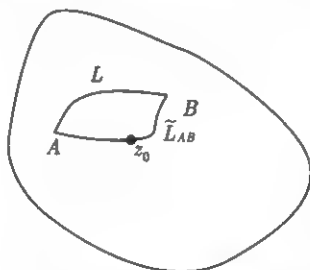


Рис. 7. Контурны интегрирования

интегрирование по заданной кривой  $L_{AB}$  на интеграл по другой кривой,  $\tilde{L}_{AB}$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$  (см. рис. 7), можно существенно улучшить оценку интеграла:

$$|F(\lambda)| \leq M \inf_{L_{AB}} \max_{z \in L_{AB}} \exp(\lambda \cdot \Re h(z)) = M \exp(\lambda \cdot \inf_{L_{AB}} \max_{z \in L_{AB}} \Re h(z)),$$

где нижняя грань  $\inf_{L_{AB}}$  берется по всем кривым, соединяющим точки  $A$  и  $B$  (с естественными сформулированными выше ограничениями). Эта оценка уже дает значение, близкое к правильному значению интеграла  $F(\lambda)$ .

Если строгий максимум  $\Re(h(z))$  достигается в одной из граничных точек,  $A$  или  $B$ , то, конечно, изменение кривой  $L_{AB}$  не даст ничего нового и приведенная выше оценка будет близка к истинному значению интеграла  $F(\lambda)$ . В этом случае можно получить асимптотику  $F(\lambda)$  тем же методом, что и в § 9. Такое обобщение довольно легко провести, и этот случай не будет здесь рассматриваться более подробно. Читателю полезно выполнить это исследование самостоятельно.

Ниже будет рассмотрен основной случай, когда максимум  $\Re(h(z))$  достигается в одной из внутренних точек кривой  $L_{AB}$ .

## § 19. Построение асимптотики интеграла методом перевала

Если при любом выборе кривой, соединяющей точки  $A$  и  $B$  (с ограничениями, рассмотренными выше), максимум  $\Re(h(z))$  достигается в одной из внутренних точек кривой  $L_{AB}$ , то лучше всего выбрать эту кривую так, чтобы она прошла через точку  $z_0$ , в которой достигается  $\inf_{L_{AB}} \max_{z \in L_{AB}} \Re(h(z))$ .

Обозначим  $\Re(h(z))$  через  $u(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  суть вещественная и мнимая части комплексной переменной  $z$  ( $z = x + iy$ ). Таким образом,  $h(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , и требуется найти такую точку  $z_0 = x_0 + iy_0$ , в которой достигается  $\min_{L_{AB}} \max_{z \in L_{AB}} u(x, y)$ .

Если представить  $u(x, y)$  как высоту местности, а кривую  $L_{AB}$  — как изображение пути от точки  $A$  до точки  $B$ , то нахождение  $\min_{L_{AB}} \max_{z \in L_{AB}} u(x, y)$  сводится к следующему. При любом прохождении от точки  $A$  до точки  $B$  максимальная высота больше, чем в начале и в конце пути. Задача состоит в том, чтобы путь был наиболее безопасным, причем опасность заключается именно в большой высоте. Лучше проделать более длинный путь, но по возможности не забираться слишком высоко. Значит, надо выбрать путь так, чтобы максимальная высота в пути была наименьшей среди всех возможных маршрутов.

Можно представить ситуацию таким образом, что начало и конец пути находятся по разные стороны от горной цепи и искомый путь как раз проходит через перевал, т. е. через наивысшую точку пути, но так, что при другом выборе дороги самая высокая точка оказалась бы еще выше.

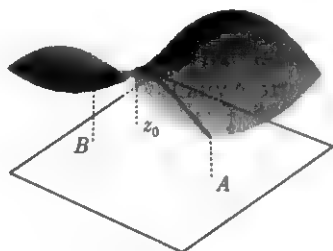


Рис. 8.  $u(x, y)$

Итак, искомая точка  $z_0$  — это точка перевала, и путь проходит через эту точку так, что вдоль пути функция  $u(x, y)$  в этой точке достигает максимального значения. Значит, производная функции  $u(x, y)$  по направлению пути в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  равна нулю. Но ясно, что

в перпендикулярном направлении функция достигает в точке  $z_0$  минимального значения (в противном случае можно было бы сместить путь немного в сторону и уменьшить максимальную высоту пути). Поэтому производная функции  $u(x, y)$  по направлению, ортогональному пути, в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  равна нулю.

Если равны нулю производные по двум перпендикулярным направлениям, то, следовательно, это стационарная точка:  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ . Вследствие уравнений Коши–Римана точка  $x_0, y_0$  является стационарной точкой и для мнимой части функции  $h(z)$ . Действительно,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Следовательно, точка  $z_0$  является стационарной точкой функции  $h(z)$ :  $h'(z_0) = 0$ .

Таким образом, правдоподобные рассуждения привели к тому, что кривую  $l$ , соединяющую точки  $A$  и  $B$ , надо провести через стационарную точку функции  $h(z)$ , т.е. через точку  $z_0$ , в которой  $h'(z_0) = 0$ . Интеграл  $F(\lambda)$  равен интегралу по кривой  $l$ , выбранной указанным способом, и можно надеяться получить хорошую асимптотику этого интеграла.

Ниже это будет сделано при дополнительных условиях:

1) точка  $(x_0, y_0)$  является единственной точкой максимума функции  $u(x, y)$  на кривой  $l$ , и значения этой функции во всех остальных точках кривой  $l$  меньше, чем  $u(x_0, y_0)$ ;

2)  $h''(z_0) \neq 0$ .

Оба предположения имеют тот же характер, что аналогичные предположения в гл. 3, 4. Они обозначают ситуацию общего положения, более подробно описанную в примечании к § 9.

Условие (2) означает, что функция

$$h(z) = h(z_0) + \frac{h''(z_0)}{2} (z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3).$$

Поэтому функция  $u(x, y) = \Re(h(z))$  с точностью до аддитивной постоянной, ортогонального преобразования координат и умножения на постоянный множитель равна  $x^2 - y^2$ . График этой функции изображен на рис. 8. Начало координат — это точка перевала или седловая точка, а благоприятный путь — это путь вдоль оси  $y$ .

Если одно из условий (1) или (2) не выполнено, то, вообще говоря, асимптотика интеграла (18.1) имеет иной вид, нежели тот, который будет получен и обоснован в конце этого параграфа.

Итак, приступим к исследованию асимптотики интеграла (18.1), который равен

$$\int_l \varphi(z) e^{\lambda h(z)} dz.$$

Так же как и в других случаях, представим этот интеграл в виде суммы интеграла по кривой  $l_\delta$ , лежащей в  $\delta$ -окрестности точки  $z_0$ , и интеграла по  $\hat{l}$  — остальной части кривой  $l$ .

Введем обозначение

$$\mu = \Re(h(z_0)).$$

Из условия (1) вытекает неравенство

$$\left| \int_{\hat{l}} \varphi(z) e^{\lambda h(z)} dz \right| \leq M e^{\lambda \mu} \cdot e^{-\gamma \lambda}, \quad (19.1)$$

где  $\gamma$  — некоторая положительная постоянная, зависящая от  $\delta$ .

В  $\delta$ -окрестности точки  $z_0$  представим функцию  $h(z)$  в виде ее ряда Тейлора:

$$h(z) = h(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = h(z_0) + \frac{h''(z_0)}{2} (z - z_0)^2 \cdot r(z),$$

где  $r(z)$  — аналитическая функция в  $\delta$ -окрестности точки  $z_0$ , такая что  $r(z_0) = 1$  и, следовательно,  $r(z) \neq 0$  при достаточно малом  $\delta$  в этой окрестности.

Поэтому в  $\delta$ -окрестности можно провести замену подынтегральной переменной  $z \Leftrightarrow \zeta$ , для которой справедливо равенство

$$h(z) - h(z_0) = -\frac{\zeta^2}{2}.$$

Для этого достаточно положить

$$\zeta = (z - z_0) \sqrt{-h''(z_0) r(z)}. \quad (19.2)$$

Под  $\sqrt{-h''(z_0) r(z)}$  будем понимать какое-либо одно из значений двузначной функции. (Эти значения отличаются лишь знаком. Какой именно знак надо выбрать, зависит от направления движения вдоль контура и может быть выяснено лишь в конкретной задаче.) Так как подкоренное выражение не обращается в нуль в  $\delta$ -окрестности точки  $z_0$ , то функция  $\zeta(z)$  аналитическая в этой окрестности.

Более того,  $\frac{d\zeta}{dz}(z_0) = \sqrt{-h''(z_0)} \neq 0$ . Следовательно, производная  $\frac{d\zeta}{dz}(z) \neq 0$  в достаточно малой окрестности точки  $z_0$ . Уменьшая  $\delta$  в случае необходимости, будем считать, что всюду в  $\delta$ -окрестности точки  $z_0$  выполнено соотношение  $\frac{d\zeta}{dz}(z) \neq 0$ .

Следовательно, на комплексной плоскости в окрестности нуля существует аналитическая функция  $z(\zeta)$ , обратная к введенной выше функции  $\zeta(z)$ . Как известно, отображение, осуществляемое такой функцией, является конформным, т.е. биекцией, сохраняющей углы между гладкими кривыми. Точка  $z_0$  переходит в начало координат, а кривая на плоскости  $z$ , проходящая через точку  $z_0$ , поворачивается против часовой стрелки на угол, равный

$$\arg \zeta'(z_0) = \arg \sqrt{-h''(z_0)}.$$

Итак, после замены (19.2) интеграл  $\int_{l_\delta} \varphi(z) e^{\lambda h(z)} dz$  превращается в

$$e^{\lambda h(z_0)} \int_{\sigma_\delta} \varphi(z(\zeta)) e^{\lambda h(z(\zeta)) - \lambda h(z_0)} z'(\zeta) d\zeta = e^{\lambda h(z_0)} \int_{\sigma_\delta} \varphi(z(\zeta)) e^{-\lambda \frac{\zeta^2}{2}} z'(\zeta) d\zeta, \quad (19.3)$$

где кривая  $\sigma_\delta$  — это образ кривой  $l_\delta$  при отображении, обратном отображению (19.2).

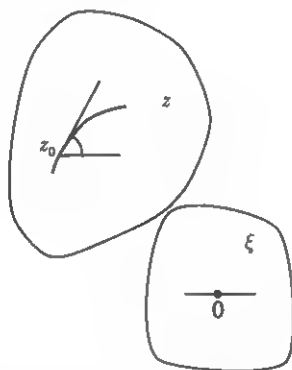


Рис. 9. Прообраз отрезка вещественной прямой

Отметим, что пока мы еще не выбрали кривую, т.е. путь через перевал  $z_0$ . Наиболее удобно считать кривую  $\sigma_\delta$  отрезком вещественной оси. Тогда задача сведется к применению метода Лапласа из гл. 3. Это и есть ответ на вопрос, каким образом надо выбирать путь  $l_\delta$  в  $\delta$ -окрестности точки  $z_0$ : кривая  $l_\delta$  есть прообраз отрезка вещественной прямой при отображении (19.2). Как указано выше, касательная к кривой получается из вещественной оси поворотом по часовой стрелке на угол  $\arg \sqrt{-h''(z_0)}$ .

Асимптотика интеграла  $F(\lambda)$  получается из формулы (19.3) применением метода Лапласа. Если обозначить  $\varphi(z(\zeta))z'(\zeta) = \psi(\zeta)$ , то с уче-

том оценки (19.1) получаем из формулы (10.6) гл. 3 окончательный ответ:

$$\int_{L_{AB}} \varphi(z) e^{\lambda h(z)} dz \stackrel{\text{ас}}{=} \exp(\lambda h(z_0)) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \frac{\psi^{(2k)}(0)}{2^k k!}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (19.4)$$

В качестве *простого примера* применения метода перевала рассмотрим снова

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda \sin t - int) dt.$$

Хотя интеграл здесь берется по отрезку вещественной прямой, но подынтегральная функция аналитическая для всех значений  $t$ , и можно считать отрезок  $[-\pi; \pi]$  лежащим на комплексной плоскости, так что

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda \sin z) e^{-inz} dz, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (19.5)$$

Точки перевала для функции  $h(z) = i \sin z$  — стационарные точки этой функции — те же самые:  $-\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{2}$ , но теперь можно передвигать контур нужным образом.

Прежде всего следует перенести концы контура в такие области, где

$$\Re h(z) = \Re(i \sin(x + iy)) = -\cos x \operatorname{sh} y < 0.$$

Это, в частности, области  $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ ,  $y < 0$  и  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ ,  $y < 0$ . Поэтому добавим к интегралу (19.5) интегралы  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-i\rho}^{-\pi} \exp(i\lambda \sin z) e^{-inz} dz$  и  $\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi-i\rho} \exp(i\lambda \sin z) e^{-inz} dz$  по отрезкам  $[-\pi - i\rho; -\pi]$  и  $[\pi; \pi - i\rho]$ ,  $\rho > 0$ .

Значение интеграла (19.5) при этом не изменится, так как подынтегральная функция периодична с периодом  $2\pi$ .

Далее следует сместить часть контура от  $-\pi - i\rho$  до  $-\frac{\pi}{2}$  в область  $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ ,  $y < 0$ , где  $\Re h(z) < 0$ , и то же самое сделать с участком от  $\frac{\pi}{2}$  до  $\pi - i\rho$ . Часть контура от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$  надо сместить в область  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $y > 0$ , где тоже  $\Re h(z) < 0$ , и затем правильно провести контур в окрестностях точек  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  и  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  (см. рис. 10).

Выше было показано, что контур в окрестности стационарной точки должен быть прообразом отрезка вещественной оси при отображении (19.2). Его касательная в точке  $z_0$  получается поворотом вещественной оси по часовой стрелке на угол, равный  $\arg \sqrt{-h''(z_0)}$ .

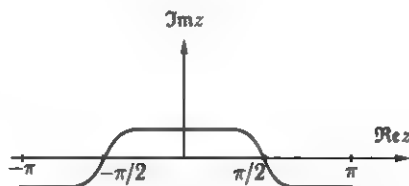


Рис. 10. Контур для функции Бесселя  $J_n(\lambda)$

Если  $z_0 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , то  $h''(z_0) = i$ . Следовательно,  $\arg \sqrt{-h''(z_0)} = \arg \sqrt{-i} = -\frac{\pi}{4}$  (или  $\frac{3\pi}{4}$ , в зависимости от знака квадратного корня).

Значит, касательная в точке  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  получается поворотом вещественной оси против часовой стрелки на угол, равный  $\frac{\pi}{4}$ . Такой выбор угла определяется заданным с самого начала прохождением контура от точки  $[-\pi; 0]$  до  $[\pi; 0]$  (а не наоборот).

Из этого примера видно, как в конкретном случае выбирается знак квадратного корня, фигурирующего в формуле.

В точке  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  контур проходит аналогичным образом, симметрично относительно оси  $y$ .

Из формулы (19.4) следует асимптотическое приближение

$$J_n(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(\lambda^{-3/2}), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

конечно, совпадающее с формулой (17.2) гл. 4. Методом, продемонстрированным на примере  $\Gamma$ -функции в гл. 2, можно явно построить все члены асимптотического разложения (однако формулы будут достаточно громоздкими).

Из этого примера видно, что интеграл с чисто мнимой фазой, рассмотренный в гл. 4, может быть исследован и методом перевала, если подынтегральная функция аналитическая.

Те нестрогие и, в общем-то незаконные (см. сноски в гл. 4), выводы формул приводили к правильным результатам, потому что их можно было сделать абсолютно корректными, переходя на комплексную плоскость так, как это сделано на приведенном здесь простом примере. Более интересный и существенный пример будет рассмотрен в следующем параграфе.

## § 20. Асимптотика функции Эйри

Уравнение Эйри

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - xu = 0 \quad (20.1)$$

играет в различных приложениях такую же значительную роль, как и уравнение Бесселя, рассмотренное в гл. 4.<sup>1)</sup>

Покажем, что функция

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ixt + i\frac{t^3}{3}\right) dt \quad (20.2)$$

является решением уравнения (20.1).

Интеграл (20.2) рассматривается как несобственный интеграл Римана, и сходимость этого интеграла не сразу очевидна (стоит отметить, что этот интеграл, рассматриваемый как интеграл Лебега, расходится, поскольку  $|\exp(ixt + it^3/3)| \equiv 1$ ). Более того, интеграл (20.2) не допускает формального дифференцирования под знаком интеграла.

Чтобы было удобнее исследовать интеграл (20.2), следует изменить контур интегрирования, считая, что интегрирование происходило вдоль вещественной оси. Сдвинем контур в верхнюю часть комплексной плоскости, рассмотрев интеграл по прямой  $\Im z = \gamma > 0$ , параллельной вещественной прямой. Значение и сходимость интеграла при этом не изменятся.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий рисунок.

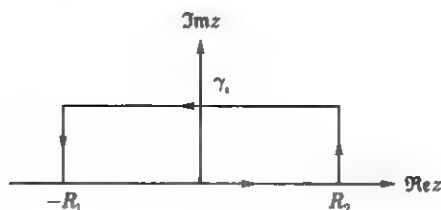


Рис. 11. Контур интегрирования

<sup>1)</sup> На самом деле уравнение Эйри сводится к уравнению Бесселя, но с нецелым индексом  $\frac{1}{3}$ . Однако дело не в том, что индекс не является целым, для любого индекса имеется интегральное представление, похожее на представление (19.5). Главная трудность состоит в том, что замена независимой переменной, сводящая уравнение Эйри к уравнению Бесселя, является комплекснозначной. Поэтому требуется изучить асимптотику функций Бесселя для комплексных значений  $x$ , что является более трудной задачей.



Согласно интегральной теореме Коши при  $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-R_1}^{R_2} \exp\left(ixt + i\frac{t^3}{3}\right) dt &= \int_{-R_1}^{-R_1+\gamma i} \exp\left(ixz + i\frac{z^3}{3}\right) dz + \\ &+ \int_{-R_1+\gamma i}^{R_2+\gamma i} \exp\left(ixz + i\frac{z^3}{3}\right) dz + \int_{R_2+\gamma i}^{R_2} \exp\left(ixz + i\frac{z^3}{3}\right) dz. \end{aligned}$$

Интегралы по отрезкам  $[-R_1; -R_1 + \gamma i]$  и  $[R_2 + \gamma i; R_2]$  стремятся к нулю при  $R_1 \rightarrow \infty$  и  $R_2 \rightarrow \infty$  соответственно. Проверим это для второго интеграла, полагая  $z = R_2 + i\eta$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{R_2+\gamma i}^{R_2} \exp\left(ixz + i\frac{z^3}{3}\right) dz \right| &= \left| \int_0^\gamma \exp\left(ix(R_2 + i\eta) + i\frac{(R_2 + i\eta)^3}{3}\right) d\eta \right| \leq \\ &\leq \int_0^\gamma \left| \exp\left(-x\eta + i\left(R_2^2\eta + \frac{(i\eta)^3}{3}\right)\right) \right| d\eta \leq \\ &\leq \exp(\gamma|x|) \int_0^\gamma \exp\left(-R_2^2\eta + \frac{\gamma^3}{3}\right) d\eta \leq \\ &\leq \frac{1}{R_2^2} \exp\left(\gamma|x| + \frac{\gamma^3}{3}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } R_2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогично легко проверяется, что стремится к нулю интеграл по отрезку  $[-R_1; -R_1 + \gamma i]$ . Следовательно,

$$\int_{-R_1}^{R_2} \exp\left(ixt + i\frac{t^3}{3}\right) dt - \int_{-R_1+\gamma i}^{R_2+\gamma i} \exp\left(ixz + i\frac{z^3}{3}\right) dz \rightarrow 0$$

при  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2 \rightarrow \infty$ .

Подынтегральная функция во втором интеграле очень быстро стремится к нулю на бесконечности. Действительно, при  $z = \xi + i\gamma$  и вещественном  $\xi$

$$\begin{aligned} \left| \exp\left(ixz + i\frac{z^3}{3}\right) \right| &= \left| \exp\left(ix(\xi + i\gamma) + i\frac{(\xi + i\gamma)^3}{3}\right) \right| = \\ &= \exp\left(-x\gamma - \xi^2\gamma + \frac{\gamma^3}{3}\right). \end{aligned}$$

Поэтому второй интеграл от  $-\infty$  до  $\infty$  абсолютно сходится, и интеграл (20.2) принимает вид

$$u(x) = \int_{-\infty+\gamma i}^{+\infty+\gamma i} \exp\left(izx + i\frac{z^3}{3}\right) dz. \quad (20.3)$$

Более того, интеграл из (20.3) можно неограниченное число раз дифференцировать по параметру под знаком интеграла. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= - \int_{-\infty+\gamma i}^{+\infty+\gamma i} z^2 \exp\left(izx + i\frac{z^3}{3}\right) dz = \\ &= \int_{-\infty+\gamma i}^{+\infty+\gamma i} (x - (z^2 + x)) \exp\left(izx + i\frac{z^3}{3}\right) dz = \\ &= xu(x) - i \int_{-\infty+\gamma i}^{+\infty+\gamma i} d \exp\left(izx + i\frac{z^3}{3}\right) = xu(x). \end{aligned}$$

Итак, мы выяснили, что  $u(x)$ , определенная формулой (20.3), является решением уравнения (20.1), и предстоит найти ее асимптотику при  $|x| \rightarrow \infty$ . Эта асимптотика имеет совершенно различный характер при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ .

Рассмотрим сначала большие положительные значения  $x$ . Так же как и при исследовании  $\Gamma$ -функции в гл. 3, удобно сначала преобразовать подынтегральное выражение так, чтобы оба слагаемых в показателе экспоненты имели одинаковый порядок относительно большого параметра  $x$ .

После замены переменной  $t = \zeta\sqrt{x}$  получаем равенство

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ix^{\frac{3}{2}}\left(\zeta + \frac{\zeta^3}{3}\right)\right) d\zeta. \quad (20.4)$$

Если обозначить  $x^{3/2} = \lambda$  и записать  $u(x) = x^{1/2}v(\lambda)$ , то интеграл

$$v(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\lambda\left(\zeta + \frac{\zeta^3}{3}\right)\right) d\zeta \quad (20.5)$$

по внешнему виду вполне напоминает интеграл, изученный в § 13. Его фаза равна  $\zeta + \zeta^3/3$ , и ее производная  $1 + \zeta^2$  нигде не равна нулю.

Так же как в § 13, интегрированием по частям легко убедиться в том, что  $v(\lambda)$  стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow \infty$  быстрее любой степени  $\lambda$ .<sup>1)</sup>

Но такой информации недостаточно, если требуется оценить произведение функции  $v(\lambda)$  на какую-нибудь функцию, быстро стремящуюся к бесконечности при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Желательно иметь явное выражение для главного члена асимптотики, а еще лучше — все асимптотическое разложение.

Для функции  $v(\lambda)$  это нетрудно сделать методом перевала. Надо рассматривать показатель  $h(\zeta) = i(\zeta + \zeta^3/3)$  как функцию комплексной переменной  $\zeta$ . Ее стационарные точки, т. е. точки, где  $h'(\zeta) = 0$ , — это  $i$  и  $-i$ . Следовательно, надо сместить контур интегрирования так, чтобы он прошел через одну из этих точек или через обе точки.

Так как  $\Re(h(i)) = -2/3$ , а  $\Re(h(-i)) = 2/3$ , то ясно, что надо провести контур через точку  $i$ . Согласно общему правилу угол поворота от вещественной прямой до касательной к пути интегрирования равен  $\arg \sqrt{-h''(i)}$ . В данном случае  $h''(i) = -2$ , следовательно, путь должен проходить через точку  $i$  по направлению вещественной оси.

Проще всего провести весь путь вдоль прямой параллельно вещественной оси, т. е. короче говоря, сделать в интеграле (20.5) замену  $\zeta = \xi + i$ . Тогда

$$\begin{aligned} v(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( i\lambda \left( \xi + i + \frac{(\xi + i)^3}{3} \right) \right) d\xi = \\ &= e^{-\frac{2}{3}\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( \lambda \left( -\xi^2 + i \frac{\xi^3}{3} \right) \right) d\xi. \end{aligned}$$

К этому интегралу уже можно применить метод Лапласа из § 11 либо заменяя независимую переменную  $\xi$  на  $\sigma$  так, чтобы  $-\xi^2 + i \frac{\xi^3}{3} = -\frac{\sigma^2}{2}$ , либо воспользовавшись замечанием 1. Вид главного члена разложения не зависит при этом от слагаемого  $i\xi^3/3$ . В соответствии с формулой (11.5)

$$v(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{2}{3}\lambda} (1 + O(\lambda^{-1})).$$

<sup>1)</sup> То обстоятельство, что интеграл несобственный, не является существенным препятствием, так как обоснование легко получить небольшим перемещением пути интегрирования в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости, как это было сделано выше.

Следовательно, заменяя  $\lambda$  на  $x^{3/2}$ , из формулы (20.4) получаем асимптотику

$$u(x) = \exp\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)x^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}\left(1 + O(x^{-\frac{3}{2}})\right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (20.6)$$

Таким образом, получено точное выражение быстро убывающего члена асимптотики функции  $u(x)$ . Более того, можно точно вычислить все члены ее асимптотического разложения. Это, однако, как и в случае функции Бесселя, довольно громоздкая операция.

В гл. 6 будет показан очень простой способ вычисления следующих членов асимптотики.

А сейчас перейдем к изучению асимптотики функции  $u(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

Обозначим  $-x = y$  и сделаем замену переменной  $t = \zeta\sqrt{y}$  в интеграле (20.2):

$$u(x) = y^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iy^{3/2}\left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right)\right) d\zeta.$$

Снова обозначим  $y^{3/2} = \lambda$ :

$$v(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\lambda\left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right)\right) d\zeta.$$

Теперь фаза  $\left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right)$  имеет стационарные точки  $\zeta = 1$  и  $\zeta = -1$ . Асимптотику интеграла  $v(\lambda)$  можно найти методом стационарной фазы, как это сделано в гл. 4, либо применить метод перевала, продеформировав контур так, как это сделано в предыдущем параграфе для функции Бесселя.

Не проводя на этот раз подробных вычислений, выпишем окончательный результат:

$$u(x) = 2\sqrt{\pi} |x|^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) (1 + O(|x|^{-\frac{3}{2}})), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (20.7)$$

Итак, закончено построение главных членов асимптотики на бесконечности функции (20.2) — решения уравнения Эйри (20.1). Это единственное (конечно, с точностью до постоянного множителя) решение уравнения Эйри, которое стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ .

Более подробно о таких решениях для целого класса линейных уравнений второго порядка будет рассказано в следующей главе.

Для функции

$$\frac{1}{2\pi} u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ixt + i\frac{t^3}{3}\right) dt$$

принято обозначение  $\text{Ai}(x)$ . Ее график помещен на рис. 12.

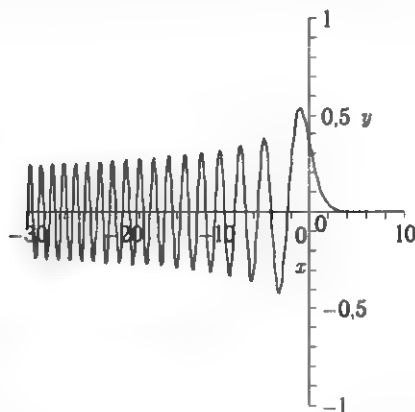


Рис. 12.  $\text{Ai}(x)$

Решения уравнения Эйри (20.1) — это, конечно, аналитические функции для всех комплексных значений  $x$ . Их асимптотика на комплексной плоскости не очень простая и весьма интересная. Она играет важную роль в теории дифракции волн.<sup>1)</sup>

Здесь рассмотрено поведение решения только для вещественных значений  $x$ . И в этом случае, как видно из графика, решения уравнения Эйри описывают асимптотический переход от колебательного процесса к быстро затухающему. Так, например, описывается переход от света к тени для световых волн.

<sup>1)</sup> См., например: Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М., 1972.

## Глава 6

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

### § 21. Постановка задачи

В этой главе будет рассмотрено поведение решений уравнений

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + p(t) \frac{du}{dt} + q(t)u = 0 \quad (21.1)$$

при  $t \rightarrow \infty$ , если известно поведение коэффициентов на бесконечности.

Пусть, например,  $p(t) \equiv 0$ ,  $q(t) \equiv 1$ , т. е. уравнение (21.1) имеет вид

$$u'' + u = 0.$$

Тогда, как известно, уравнение имеет два линейно независимых решения:  $e^{it}$  и  $e^{-it}$ . Теперь предположим, что  $p(t) \rightarrow 0$ , а  $q(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow \infty$ . Верно ли, что при этих условиях справедливо естественное предположение:

А) уравнение (21.1) имеет два линейно независимых решения, одно из которых на бесконечности эквивалентно  $e^{it}$ , а другое —  $e^{-it}$ ?

Оказывается, что, вообще говоря, это неверно. Например, все решения уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + t^{-1} \frac{du}{dt} + u = 0 \quad (21.2)$$

стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ ; это уравнение имеет два решения, которые при  $t \rightarrow \infty$  эквивалентны  $\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}$  и  $\frac{e^{-it}}{\sqrt{t}}$ .

А асимптотика решений уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(1 + \frac{1}{t}\right)u = 0 \quad (21.3)$$

при  $t \rightarrow \infty$  имеет еще более сложный характер.

Уравнения, подобные уравнениям (21.2) и (21.3), также будут исследованы ниже.

Но оказывается, что при достаточно быстром стремлении коэффициентов  $p(t)$  и  $q(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  к нулю и единице соответственно предположение (A) справедливо. Доказательству этого утверждения посвящены два следующих параграфа.

## § 22. Ограниченные колеблющиеся решения

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + q(t)u = 0, \quad (22.1)$$

где  $q(t) \in C(T; \infty)$ ,  $q(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow \infty$ . Более того, будем предполагать, что при  $t \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое разложение

$$q(t) \stackrel{\text{ас}}{=} 1 + \sum_{k=2}^{\infty} q_k t^{-k}. \quad (22.2)$$

Учитывая это разложение, нетрудно построить формальные ряды, которые на бесконечности ведут себя приблизительно как  $e^{it}$  или  $e^{-it}$  и формально удовлетворяют уравнению (22.1). Будем искать такой ряд в виде

$$\tilde{u} = e^{it} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}. \quad (22.3)$$

Так как решение однородного уравнения (22.1) после умножения на постоянную снова остается решением этого уравнения, то постоянную  $c_0 \neq 0$  можно выбрать произвольно. Будем считать, что

$$c_0 = 1. \quad (22.4)$$

Подставим ряд (22.3) в уравнение (22.1), где  $q(t)$  заменим рядом (22.2). После сокращения на  $e^{it}$  получается формальное равенство

$$\begin{aligned} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k} + 2i \sum_{k=0}^{\infty} (-k) c_k t^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) c_k t^{-k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k} + \\ + \left( \sum_{k=2}^{\infty} q_k t^{-k} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k} \right) = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , получаем рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= -2ic_1 + q_2c_0, \\ 0 &= -4ic_2 + 2c_1 + q_2c_1 + q_3c_0, \\ &\dots\dots\dots (22.5) \\ 0 &= -2kic_k + k(k-1)c_{k-1} + \sum_{j=0}^{k-1} c_j q_{k+1-j} = 0, \quad k > 0. \end{aligned}$$

Из этих соотношений последовательно определяются все  $c_k$ .

Тем самым построен ряд (22.3). Вообще говоря, этот ряд расходится, но можно хотя бы ожидать, что он является асимптотическим (при  $t \rightarrow \infty$ ) рядом для какого-нибудь решения уравнения (22.1). Настоящий параграф и будет посвящен доказательству этого факта.

**Теорема 22.1.** *Существует решение  $u(t)$  уравнения (22.1), которое при  $t \rightarrow \infty$  разлагается в асимптотический ряд (22.3), где коэффициенты  $c_k$  определяются соотношениями (22.4), (22.5). Это означает, что*

$$\forall n > 0 \quad u(t) - e^{it} \sum_{k=0}^n c_k t^{-k} = O(t^{-n-1}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (22.6)$$

Доказательство теоремы будет дано позднее, а сейчас проверим, что ряд (22.3) является асимптотическим решением уравнения (22.1) при  $t \rightarrow \infty$ . Это означает, что частичная сумма ряда (22.3)

$$\hat{u}_n(t) = e^{it} \sum_{k=0}^n c_k t^{-k} \quad (22.7)$$

приближенно удовлетворяет уравнению. Более точно:  $\forall n$

$$L\hat{u}_n(t) = O(t^{-n-2}). \quad (22.8)$$

Здесь и далее используется обозначение

$$Lu \equiv \frac{d^2 u}{dt^2} + q(t)u.$$

Действительно, при подстановке всего ряда (22.3) в уравнение (22.1) обращаются в нуль коэффициенты при всех степенях  $t$ . А отсутствующие в  $u_n(t)$  члены

$$e^{it}(c_{n+1}t^{-n-1} + c_{n+2}t^{-n-2} + \dots)$$

после подстановки в оператор  $L$  образуют степени с показателем, не превышающим  $(-n-2)$ .



Соотношение (22.8) будет использовано в дальнейшем. А предварительно докажем две несложные леммы.

**Лемма 22.1.** Пусть функция  $f(t) = O(t^{-r})$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $r > 1$ ,  $f(t) \in C[T; \infty)$ . Тогда уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = f(t) \quad (22.9)$$

имеет при  $t \geq T$  единственное решение порядка  $O(t^{-r+1})$  и для этого решения справедлива формула

$$u(t) = \int_t^\infty \sin(s-t)f(s) ds. \quad (22.10)$$

**Доказательство.** Из условий, наложенных на функцию  $f(t)$ , вытекает, что интеграл (22.10) и интегралы, полученные после его однократного и двукратного дифференцирования, равномерно сходятся. Проверка показывает, что функция (22.10) удовлетворяет уравнению (22.9):

$$u'(t) = - \int_t^\infty \cos(s-t)f(s) ds,$$

$$u''(t) = f(t) - \int_t^\infty \sin(s-t)f(s) ds = f(t) - u(t).$$

Легко получить и требуемую оценку функции (22.10):

$$|u(t)| \leq \int_t^\infty |f(s)| ds < M \int_t^\infty s^{-r} ds = \frac{M}{r-1} t^{-r+1} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Решение уравнения (22.9), которое стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , очевидно, единственно, так как разность двух таких решений — это стремящееся к нулю решение однородного уравнения:  $z'' + z = 0$ . Так как общее решение этого уравнения  $C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$  не стремится к нулю, если  $|C_1| + |C_2| > 0$ , то  $z \equiv 0$ . ▽

**Лемма 22.2.** Пусть функция  $f(t)$  удовлетворяет условиям леммы 22.1, а функция  $h(t) \in C[T; \infty)$ ,  $h(t) = O(t^{-\alpha})$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\alpha > 1$ . Тогда уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + [1 - h(t)]u = f(t) \quad (22.11)$$

имеет при  $t \geq T$  единственное решение порядка  $O(t^{-r+1})$ .

Доказательство. Перепишем уравнение (22.11) в виде

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = f(t) + h(t)u \quad (22.12)$$

и применим к нему лемму 22.1, считая правую часть этого уравнения заданной функцией. В результате получаем равенство

$$u(t) = \int_1^{\infty} \sin(s-t)(f(s) + h(s)u(s)) ds. \quad (22.13)$$

Прежде всего надо убедиться в том, что дифференциальное уравнение (22.12) и интегральное уравнение (22.13) эквивалентны при условии

$$u(t) = O(t^{-r+1}). \quad (22.14)$$

Если функция  $u(t)$  удовлетворяет условию (22.14) и справедливо равенство (22.12), то его правая часть

$$f(t) + h(t)u(t) = O(t^{-r}) + O(t^{-\alpha}) \cdot O(t^{-r+1}) = O(t^{-r}).$$

Поэтому, согласно лемме 22.1, справедливо равенство (22.13).

Обратно, если функция  $u(t)$  удовлетворяет условию (22.14) и интегральному уравнению (22.13), то подынтегральное выражение

$$f(s) + h(s)u(s) = O(s^{-r}) + O(s^{-\alpha}) \cdot O(s^{-r+1}) = O(s^{-r}).$$

Следовательно, согласно той же лемме, справедливо равенство (22.12).

Итак, осталось доказать однозначную разрешимость интегрального уравнения (22.13) при выполнении условия (22.14). Сначала будем рассматривать лишь значения  $t \geq \gamma$  для некоторого достаточно большого числа  $\gamma$  и докажем существование единственного решения уравнения (22.13) методом сжимающих отображений.

В качестве банахова пространства  $B_\gamma$  рассмотрим множество функций  $u(t)$ , непрерывных при  $t \geq \gamma$  с нормой

$$\|u\| = \sup_{t \geq \gamma} |u(t)| t^{1-r}.$$

Нетрудно убедиться в том, что это пространство полное и ему принадлежат те и только те непрерывные функции, для которых выполнено условие (22.14). При этом

$$|u(t)| \leq \|u\| t^{-r+1}.$$

Уравнение (22.13) перепишем в операторном виде

$$u = Gu + F \quad \text{или} \quad (I - G)u = F, \quad (22.15)$$

где линейный оператор  $G$ , действующий из  $\mathbf{B}_\gamma$  в  $\mathbf{B}_\gamma$ , определен формулой

$$Gv = \int_t^\infty h(s) \sin(s-t) \cdot v(s) ds,$$

а правая часть

$$F(t) = \int_t^\infty \sin(s-t) f(s) ds \in \mathbf{B}_\gamma,$$

так как

$$|F(t)| \leq \int_t^\infty Ms^{-r} ds = \frac{M}{r-1} t^{-r+1}.$$

Проверим, что при достаточно большом  $\gamma$  оператор  $G$  имеет норму меньше 1. Действительно,

$$\begin{aligned} |Gv(t)| &\leq \int_t^\infty |h(s)v(s)| ds \leq \int_1^\infty Ms^{-\alpha} \|v\| s^{-r+1} ds = \\ &= \|v\| t^{-r+1} \cdot \frac{Mt^{1-\alpha}}{\alpha+r-2} \leq \|v\| t^{-r+1} \cdot \frac{M\gamma^{1-\alpha}}{\alpha+r-2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|Gv(t)| t^{r-1} \leq \|v\| \frac{M\gamma^{1-\alpha}}{(\alpha+r-2)} = \beta \|v\|,$$

где  $\beta = \frac{M}{(\alpha+r-2)\gamma^{\alpha-1}} < 1$  при достаточно большом  $\gamma$ , т.е.  $\|G\| \leq \beta < 1$ .

Итак, оператор  $G$  имеет норму меньше 1, поэтому уравнение (22.15) имеет единственное решение при  $t \geq \gamma$ . Следовательно, и уравнение (22.11) имеет при  $t \geq \gamma$  единственное решение, удовлетворяющее условию (22.14). Это решение естественно единственным образом продолжается на отрезок  $[T; \gamma]$  как решение задачи Коши для уравнения (22.11) с начальными данными в точке  $\gamma$ , что и завершает доказательство леммы. ▼

Теперь можно приступить к обоснованию асимптотики.

Доказательство теоремы 22.1. Осталось показать, что существует решение уравнения (22.1), которое разлагается в построенный выше формальный ряд (22.3). Для этого рассмотрим частичную сумму  $\hat{u}_n(t)$  ряда (22.7). Как отмечено выше,

$$L\hat{u}_n(t) \equiv \frac{d^2 u_n}{dt^2} + (1 - h(t))u_n = \varphi_n(t) = O(t^{-n-2}).$$

Функция  $h(t) \equiv 1 - q(t) = O(t^{-2})$ . Согласно лемме 22.2 существует решение  $v_n(t)$  уравнения

$$\frac{d^2 v_n}{dt^2} + (1 - h(t))v_n = \varphi_n(t),$$

такое что

$$v_n(t) = O(t^{-n-1}).$$

Поэтому их разность  $w_n(t) = \hat{u}_n(t) - v_n(t)$  удовлетворяет уравнению (22.1), причем  $w_n(t) = \hat{u}_n(t) + O(t^{-n-1})$ . Тем самым доказательство теоремы было бы завершено, если бы функция  $w_n(t)$  не зависела от  $n$ . В этом довольно легко убедиться, опираясь опять-таки на лемму 22.2.

Действительно, функция  $z_n(t) = w_n(t) - w_{n+1}(t)$  также удовлетворяет однородному уравнению  $\frac{d^2 z_n}{dt^2} + [1 - h(t)]z_n = 0$ , причем

$$\begin{aligned} z_n &= e^{it} \sum_{k=0}^n c_k t^{-k} - v_n(t) - \left( e^{it} \sum_{k=0}^{n+1} c_k t^{-k} - v_{n+1}(t) \right) = \\ &= -e^{it} c_{n+1} t^{-n-1} - v_n(t) + v_{n+1}(t) = O(t^{-n-1}). \end{aligned}$$

Согласно лемме 22.2 решение однородного уравнения, которое так быстро стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , тождественно равно нулю. Следовательно,  $w_{n+1}(t) \equiv w_n(t) = u(t)$ , чем и завершается доказательство теоремы. ▼

Равенство (22.6) означает существование решения  $u_1(t)$  уравнения (22.1), такого что

$$u_1(t) \stackrel{\text{as}}{=} e^{it} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где  $c_k$  — решение выписанной выше рекуррентной системы (22.5).

Точно так же можно найти и другое решение  $u_2(t)$ , которое имеет асимптотическое разложение

$$u_2(t) \stackrel{\text{as}}{=} e^{-it} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k t^{-k}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \tilde{c}_0 = 1.$$

Рекуррентная система, которой должны удовлетворять коэффициенты  $\tilde{c}_k$ , чтобы выписанный ряд хотя бы формально удовлетворял уравнению (22.1), аналогична системе (22.5). Дальнейшее доказательство тоже вполне аналогично проведенному выше для функции  $u_1(t)$ .

Решения  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , очевидно, линейно независимы, так что общее решение уравнения (22.1) имеет вид  $C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)$ . Если  $q(t)$  вещественно, то коэффициенты  $\tilde{c}_k$  комплексно-сопряжены коэффициентам  $c_k$ .

### § 23. Уравнения с экспоненциально растущими и с экспоненциально быстро стремящимися к нулю решениями

В этом параграфе рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - q(t)u = 0, \quad (23.1)$$

где  $q(t) \in C[T; \infty)$ ,  $q(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow \infty$ . Как и в предыдущем случае, будем предполагать, что при  $t \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое разложение

$$q(t) \stackrel{\text{ас}}{=} 1 + \sum_{k=2}^{\infty} q_k t^{-k}. \quad (23.2)$$

Поведение решений уравнения (23.1) совершенно непохоже на изученное выше поведение решений уравнения (22.1).

Действительно, если  $q(t) \equiv 1$ , то уравнение (23.1) имеет вид  $\frac{d^2 u}{dt^2} - u = 0$  и его общее решение —  $C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ . Только одно решение этого уравнения (с точностью до постоянного множителя) ограничено и даже быстро стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Все остальные решения быстро стремятся к  $\infty$  или к  $-\infty$ .

Оказывается, так же обстоит дело и с уравнением (23.1). Асимптотику решения этого уравнения, которое быстро стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , можно построить и обосновать тем же путем, который был проведен в предыдущем параграфе.

Для этого сначала построим формальный ряд, который на бесконечности ведет себя приблизительно как  $e^{-t}$  и формально удовлетворяет уравнению (23.1). Будем искать такой ряд в виде

$$\tilde{u} = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}. \quad (23.3)$$

Снова будем считать, что

$$c_0 = 1. \quad (23.4)$$

Подставим ряд (23.3) в уравнение (23.1), где  $q(t)$  заменим рядом (23.2). После сокращения на  $e^{-t}$  получается формальное равенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-k) c_k t^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) c_k t^{-k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k} - \\ - \left( \sum_{k=2}^{\infty} q_k t^{-k} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k} \right) = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , получаем рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= 2c_1 - q_2c_0, \\ 0 &= 4c_2 + 2c_1 - q_2c_1 - q_3c_0, \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= 2kc_k + k(k-1)c_{k-1} - \sum_{j=0}^{k-1} c_j q_{k+1-j} = 0, \quad k > 0. \end{aligned} \tag{23.5}$$

Из этих соотношений последовательно определяются все  $s_k$ .

Тем самым построен ряд (23.3). Дальнейшее исследование повторяет то, что было сделано в предыдущем параграфе, с тем отличием, что во всех оценках должен присутствовать весовой множитель  $e^{-t}$ .

**Теорема 23.1.** *Существует решение  $u(t)$  уравнения (23.1), которое при  $t \rightarrow \infty$  разлагается в асимптотический ряд (23.3), где коэффициенты  $s_k$  определяются соотношениями (23.4), (23.5). Это означает, что*

$$\forall n > 0 \quad u(t) - e^{-t} \sum_{k=0}^n c_k t^{-k} = O(e^{-t} t^{-n-1}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (23.6)$$

Аналогично предыдущему, ряд (23.3) является асимптотическим решением уравнения (23.1) при  $t \rightarrow \infty$ :

$$L_1 \hat{u}_n(t) = O(e^{-t} t^{-n-2}) \quad \forall n. \quad (23.7)$$

Здесь и далее используется обозначение

$$L_1 u \equiv \frac{d^2 u}{dt^2} - q(t)u.$$

**Лемма 23.1.** Пусть функция  $f(t) = O(e^{-t}t^{-r})$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $r > 1$ ,  $f(t) \in C[T; \infty)$ . Тогда уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - u = f(t) \quad (23.8)$$

имеет при  $t \geq T$  единственное решение порядка  $O(e^{-t}t^{-r+1})$  и для этого решения справедлива формула

$$u(t) = \int_t^{\infty} \text{sh}(s-t)f(s)ds. \quad (23.9)$$

**Доказательство.** Из условий, наложенных на функцию  $f(t)$ , вытекает, что интеграл (23.9) и интегралы, полученные после его однократного и двукратного дифференцирования, равномерно сходят-

ся. Проверка показывает, что функция (23.9) удовлетворяет уравнению (23.8):

$$u'(t) = - \int_t^{\infty} \operatorname{ch}(s-t)f(s)ds,$$

$$u''(t) = f(t) + \int_t^{\infty} \operatorname{sh}(s-t)f(s)ds = f(t) + u(t).$$

Легко получить и требуемую оценку функции (23.9):

$$|u(t)| \leq \int_t^{\infty} e^{s-t}|f(s)|ds < Me^{-t} \int_t^{\infty} s^{-r}ds = e^{-t} \frac{M}{r-1} t^{-r+1}.$$

Решение уравнения (23.8), которое не превосходит  $Me^{-t}t^{-r+1}$ , единственно, так как разность двух таких решений — это решение однородного уравнения:  $z'' - z = 0$ . Общее решение этого уравнения  $C_1e^t + C_2e^{-t}$  не может стремиться к нулю так быстро, если  $|C_1| + |C_2| > 0$ . Следовательно,  $z \equiv 0$ . ▽

**Л е м м а 23.2.** Пусть функция  $f(t)$  удовлетворяет условиям леммы 22.1, а функция  $h(t) \in C[T; \infty)$ ,  $h(t) = O(t^{-\alpha})$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\alpha > 1$ . Тогда уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} - [1 + h(t)]u = f(t) \quad (23.10)$$

имеет при  $t \geq T$  единственное решение порядка  $O(e^{-t}t^{-r+1})$ .

**Доказательство.** Перепишем уравнение (23.10) в виде

$$\frac{d^2u}{dt^2} - u = f(t) + h(t)u \quad (23.11)$$

и применим к нему лемму 23.1, считая правую часть этого уравнения заданной функцией. В результате получаем равенство

$$u(t) = \int_t^{\infty} \operatorname{sh}(s-t)(f(s) + h(s)u(s))ds. \quad (23.12)$$

Прежде всего надо убедиться в том, что дифференциальное уравнение (23.11) и интегральное уравнение (23.12) эквивалентны при условии

$$u(t) = O(e^{-t}t^{-r+1}). \quad (23.13)$$

Если функция  $u(t)$  удовлетворяет условию (23.13) и уравнению (23.11), то его правая часть

$$f(t) + h(t)u(t) = O(e^{-t}t^{-r}) + O(t^{-\alpha}) \cdot O(e^{-t}t^{-r+1}) = O(e^{-t}t^{-r}).$$

Поэтому, согласно лемме 23.1, справедливо равенство (23.12).

Обратно, если функция  $u(t)$  удовлетворяет условию (23.13) и интегральному уравнению (23.12), то подынтегральное выражение

$$f(s) + h(s)u(s) = O(e^{-s}s^{-r}) + O(s^{-\alpha}) \cdot O(e^{-s}s^{-r+1}) = O(e^{-s}s^{-r}).$$

Следовательно, согласно той же лемме, справедливо равенство (23.11).

Итак, осталось доказать однозначную разрешимость интегрального уравнения (23.12) при выполнении условия (23.13).

Сначала будем рассматривать лишь значения  $t \geq \gamma$  для некоторого достаточно большого числа  $\gamma$  и докажем существование единственного решения уравнения (23.12).

В качестве банахова пространства  $\mathbf{B}_\gamma$  рассмотрим множество функций  $u(t)$ , непрерывных при  $t \geq \gamma$  с нормой

$$\|u\| = \sup_{t \geq \gamma} |u(t)| e^t t^{r-1}.$$

Нетрудно убедиться в том, что это пространство полное и ему принадлежат те и только те непрерывные функции, для которых выполнено условие (23.13). При этом

$$|u(t)| \leq \|u\| e^{-t} t^{-r+1}.$$

Уравнение (23.12) перепишем в операторном виде:

$$u = Gu + F \text{ или } (I - G)u = F, \quad (23.14)$$

где линейный оператор, действующий из  $\mathbf{B}_\gamma$  в  $\mathbf{B}_\gamma$ , определен формулой

$$Gv = \int_1^\infty h(s) \operatorname{sh}(s-t) \cdot v(s) ds,$$

а правая часть

$$F(t) = \int_t^\infty \operatorname{sh}(s-t) f(s) ds \in \mathbf{B}_\gamma,$$

так как

$$|F(t)| \leq \int_1^\infty M e^{s-t} e^{-s} s^{-r} ds = e^{-t} \frac{M}{r-1} t^{-r+1}.$$

Проверим, что при некотором большом  $\gamma$  оператор  $G$  имеет норму меньше 1. Действительно,

$$\begin{aligned} |Gv(t)| &\leq \int_t^\infty |h(s) e^{s-t} v(s)| ds \leq \int_t^\infty M s^{-\alpha} e^{s-t} \|v\| e^{-s} s^{-r+1} ds = \\ &= e^{-t} \|v\| \frac{M}{t^{\alpha+r-2}} = e^{-t} \|v\| t^{-r+1} \cdot \frac{M t^{1-\alpha}}{\alpha+r-2} \leq e^{-t} \|v\| t^{-r+1} \cdot \frac{M \gamma^{1-\alpha}}{\alpha+r-2}. \end{aligned}$$



Следовательно,

$$|Gv(t)|e^t t^{r-1} \leq \|v\| \frac{M\gamma^{1-\alpha}}{(\alpha+r-2)} = \beta\|v\|,$$

где  $\beta = \frac{M}{(\alpha+r-2)\gamma^{\alpha-1}} < 1$  при достаточно большом  $\gamma$ , т. е.  $\|G\| \leq \beta < 1$ .

Итак, оператор  $G$  имеет норму меньше 1, поэтому уравнение (23.14) имеет единственное решение при  $t \geq \gamma$ . Следовательно, и уравнение (23.10) имеет при  $t \geq \gamma$  единственное решение, удовлетворяющее условию (23.13).

Как и в предыдущем параграфе, решение единственным образом продолжается на отрезок  $[T; \gamma]$  как решение задачи Коши. Лемма доказана. ▼

Доказательство теоремы 23.1. Рассмотрим  $\hat{u}_n(t)$  — частичную сумму ряда (23.3). Как отмечено выше,

$$L\hat{u}_n(t) \equiv \frac{d^2 u_n}{dt^2} - (1+h(t))u_n = \varphi_n(t) = O(e^{-t}t^{-n-2}),$$

где функция  $h(t) \equiv q(t) - 1$  в силу условия (23.2) удовлетворяет соотношению  $h(t) = O(t^{-2})$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Согласно лемме 23.2 существует решение  $v_n(t)$  уравнения

$$\frac{d^2 v_n}{dt^2} - (1+h(t))v_n = \varphi_n(t),$$

такое что  $v_n(t) = O(e^{-t}t^{-n-1})$ . Поэтому разность  $w_n(t) = \hat{u}_n(t) - v_n(t)$  удовлетворяет уравнению (23.1), причем  $w_n(t) = \hat{u}_n(t) + O(e^{-t}t^{-n-1})$ .

Далее опять-таки надо показать, что функция  $w_n(t)$  не зависит от  $n$ . Действительно, функция  $z_n(t) = w_n(t) - w_{n+1}(t)$  также удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} - [1+h(t)]z_n = 0,$$

причем

$$\begin{aligned} z_n &= e^{-t} \sum_{k=0}^n c_k t^{-k} - v_n(t) - \left( e^{-t} \sum_{k=0}^{n+1} c_k t^{-k} - v_{n+1}(t) \right) = \\ &= -e^{-t} c_{n+1} t^{-n-1} - v_n(t) + v_{n+1}(t) = O(e^{-t}t^{-n-1}). \end{aligned}$$

Согласно лемме 23.2 решение однородного уравнения, которое так быстро стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , тождественно равно нулю. Следовательно,  $w_{n+1}(t) \equiv w_n(t) = u(t)$ , чем и завершается доказательство теоремы. ▼

Равенство (23.6) означает существование решения  $u_1(t)$  уравнения (23.1), такого что

$$u_1(t) \stackrel{\text{ас}}{=} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (23.15)$$

где  $c_k$  — решение выписанной выше рекуррентной системы (23.5).

Асимптотическое разложение другого решения, линейно независимого с  $u_1(t)$ , таким способом найти не удастся. Точнее, формальный асимптотический ряд вида

$$e^t \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k t^{-k} \quad (23.16)$$

выписать легко. Коэффициенты  $\tilde{c}_k$  находятся из рекуррентной системы так же легко, как и коэффициенты  $c_k$ . Но дальнейшее доказательство тем же способом не проходит, так как формула для решения, аналогичная формуле (23.9) с заменой  $e^{-t}$  на  $e^t$ , не имеет смысла.

Для построения асимптотики другого решения воспользуемся простым способом понижения порядка уравнения.

Пусть  $u_1(t)$  — построенное выше решение уравнения (23.1) с асимптотикой

$$u_1(t) \stackrel{\text{ас}}{=} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Сделаем замену неизвестной функции  $u(t) = u_1(t)V(t)$ . После подстановки в уравнение (23.1) получаем соотношение  $u_1(t)V''(t) + 2u_1'V'(t) = 0$ , откуда  $V(t) = \int_{t_0}^t u_1^{-2}(\tau) d\tau$ . Постоянную  $t_0$  можно взять

настолько большой, чтобы  $u_1(t) > 0$  при  $t \geq t_0$ . Это возможно ввиду асимптотического разложения (23.15) функции  $u_1(t)$ .

Для любого фиксированного натурального  $n$  представим  $u_1(t)$  как  $e^{-t}(1 + r_n(t))$ , где

$$r_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k t^{-k} + \rho_n(t), \quad \rho_n(t) = O(t^{-n-1}).$$

Пусть  $t_1 > t_0$  таково, что  $|r_n(t)| < \frac{1}{2}$  при  $t \geq t_1$ . Тогда

$$V(t) = \int_{t_0}^{t_1} u_1^{-2}(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t u_1^{-2}(\tau) d\tau = C + \int_{t_1}^t e^{2\tau} \frac{1}{(1 + r_n(\tau))^2} d\tau.$$

Разложим функцию  $\frac{1}{(1 + r_n(\tau))^2}$  в ряд при  $r_n \rightarrow 0$  и заменим  $r_n(t)$  ее выражением через сумму степеней  $t$  и остаточного

члена  $\rho_n(t)$ . В результате получим следующее выражение для  $V(t)$ :

$$V(t) = C + \int_{t_1}^t e^{2\tau} \left( 1 + \sum_{k=1}^n d_k \tau^{-k} + \sigma_n(\tau) \right) d\tau,$$

где  $d_k$  — некоторые постоянные, а  $\sigma_n(\tau) = O(\tau^{-n-1})$ .

Каждый из интегралов  $\int_{t_1}^t e^{2\tau} d_k \tau^{-k} d\tau$  легко разложить в асимптотический ряд при  $t \rightarrow \infty$ , проводя последовательно интегрирование по частям наподобие того, как это показано в гл. 1. В результате получается асимптотическое представление

$$V(t) = e^{2t} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n b_k t^{-k} + \omega_n(t) \right), \quad \omega_n(t) = O(\tau^{-n-1}).$$

Умножая это выражение на асимптотическое представление решения  $u_1(t)$ , получаем (в силу произвольности  $n$ ) окончательное асимптотическое разложение второго решения уравнения (23.1)

$$u_2(t) \stackrel{\text{as}}{=} e^t \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^{-k}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Коэффициенты  $g_k$  получены очень длинными и громоздкими вычислениями. Спрашивается, какое они имеют отношение к коэффициентам  $\tilde{c}_k$  формального разложения (23.16)? Коэффициенты  $\tilde{c}_k$  получаются из рекуррентной системы, аналогичной системе (23.5). Без ограничения общности можно считать, что  $g_0 = 1$ . Оказывается, что тогда все  $g_k = \tilde{c}_k$ .

Действительно, поскольку функция  $u_0(t)$  разлагается в асимптотический ряд при  $t \rightarrow \infty$ , то из уравнения (23.1) следует, что в такой же ряд разлагается и  $u_2''(t)$ . Так как интегрирование асимптотического ряда законно, то отсюда следует, что в данном случае асимптотический ряд для  $u_2(t)$  можно почленно дифференцировать. Отсюда вытекает, что коэффициенты  $g_k$  удовлетворяют той же рекуррентной системе, что и коэффициенты  $\tilde{c}_k$ . Так как решения этой системы определяются однозначно после того, как выбрано значение  $\tilde{c}_0$ , то, следовательно, все  $g_k = \tilde{c}_k$ .

Итак, окончательный вывод следующий: уравнение (23.1) имеет два линейно независимых решения, которые при  $t \rightarrow \infty$  разлагаются в асимптотические ряды

$$u_1(t) \stackrel{\text{as}}{=} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}, \quad c_0 = 1, \quad u_2(t) \stackrel{\text{as}}{=} e^t \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k t^{-k}, \quad \tilde{c}_0 = 1.$$

Коэффициенты  $s_k$  и  $\tilde{s}_k$  вычисляются из рекуррентных систем, полученных формальной подстановкой этих рядов в уравнение.

**З а м е ч а н и е.** Асимптотика решений уравнений (22.1) и (23.1) была получена в предположении, что коэффициент  $q(t) = 1 + O(t^{-2})$ . То обстоятельство, что предел коэффициента  $q(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  равен единице, конечно, не играет никакой роли, важно лишь то, что он не равен нулю. Если  $q(t) = a^2 + O(t^{-2})$ , то замена независимой переменной  $\tau = at$  сводит такую задачу к случаю  $q(\tau) = 1 + O(\tau^{-2})$ . Тогда главный член асимптотики решения имеет вид  $\exp(\pm iat)$  или  $\exp(\pm at)$  в зависимости от того, какое из уравнений (22.1) или (23.1) рассматривается. Остальные формальные построения и доказательства не изменяются.

Более существенное отличие состоит в скорости стремления коэффициента  $q(t)$  к пределу. Как отмечено в § 21, в случае  $q(t) = 1 + O(t^{-1})$  асимптотика решения имеет совсем другой характер. Между тем, при доказательстве лемм предполагалось лишь, что  $q(t) = 1 + O(t^{-\alpha})$ ,  $\alpha > 1$ . Если при этом коэффициент  $q(t)$  имеет асимптотическое разложение с точностью до любой (или достаточно большой) степени  $t^{-1}$  и можно построить формальное асимптотическое разложение решения, то все доказательство целиком переносится и на этот случай: существуют настоящие решения уравнения, обладающие построенными формально асимптотиками.

Что касается более общего уравнения (21.1), то приведенные выше построения и доказательства к нему неприменимы. Однако исследование широкого класса уравнений сводится к уравнениям, рассмотренным в этом параграфе, с помощью довольно простых преобразований. Об этом будет идти речь в следующем параграфе.

## § 24. Общее линейное уравнение второго порядка. Преобразования Лиувилля. Примеры

Вернемся к исследованию уравнения (21.1). Существуют две довольно простые замены, называемые преобразованиями Лиувилля, которые часто приводят уравнение (21.1) к одному из уравнений, (22.1) или (23.1).

Первое преобразование приводит уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + p(t) \frac{du}{dt} + q(t)u = 0 \quad (24.1)$$

к уравнению, в котором коэффициент при первой производной равен нулю. Это замена неизвестной функции  $u(t) = v(t)z(t)$ , где  $v(t)$  — новая неизвестная функция, а фиксированную функцию  $z(t)$  надо подо-

брать. Подставляя в уравнение (24.1)  $u(t) = v(t)z(t)$ ,  $z(t) \neq 0$ , получаем уравнение

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \left( p(t) + 2 \frac{z'(t)}{z(t)} \right) \frac{dv}{dt} + \left( q(t) + p(t) \frac{z'(t)}{z(t)} + \frac{z''(t)}{z(t)} \right) v = 0$$

Таким образом, функцию  $z(t)$  надо выбрать так, чтобы  $p(t) + 2 \frac{z'(t)}{z(t)} = 0$ .

Итак, первое преобразование Лиувилля имеет следующий вид:

$$u(t) = v(t) \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t p(s) ds \right). \quad (24.2)$$

Второе преобразование превращает коэффициент  $q(t)$  в уравнении (24.1) в 1 или  $-1$  в зависимости от знака  $q(t)$ . Это преобразование независимой переменной  $s = s(t)$ . После такой замены уравнение (24.1) превращается в уравнение

$$(s'(t))^2 \frac{d^2 u}{ds^2} + (p(t)s'(t) + s''(t)) \frac{du}{ds} + q(t)u = 0.$$

Если положить  $(s'(t))^2 = |q(t)|$ , то в новом уравнении коэффициент при функции будет равен 1 или  $(-1)$ .

Таким образом, второе преобразование Лиувилля имеет следующий вид:

$$s = \int_{t_0}^t |q(\tau)|^{1/2} d\tau. \quad (24.3)$$

Правда, после второго преобразования коэффициент при первой производной, вообще говоря, будет отличен от нуля. Но можно провести первое преобразование, после чего для широкого класса уравнений задача сведется к той, решение которой излагалось в предыдущих параграфах.

**Пример I.** Начнем примеры с уравнения Бесселя, рассмотренного в § 17:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{du}{dt} + \left( 1 - \frac{n^2}{t^2} \right) u = 0.$$

Здесь коэффициент  $p(t) = t^{-1}$ . Поэтому можно применить первое преобразование Лиувилля:

$$u = v \exp \left( -\frac{1}{2} \int_1^t \tau^{-1} d\tau \right) = vt^{-1/2}, \quad u' = v't^{-1/2} - \frac{1}{2} vt^{-3/2},$$

$$u'' = v''t^{-1/2} - v't^{-3/2} + \frac{3}{4} vt^{-5/2}.$$

В результате уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \left(1 - \frac{n^2 - 1/4}{t^2}\right)v = 0,$$

изученный в § 22. Согласно полученному там результату уравнение имеет два линейно независимых решения со следующими асимптотиками при  $t \rightarrow \infty$ :

$$v_3 \stackrel{\text{as}}{=} e^{it} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}\right), \quad v_5 \stackrel{\text{as}}{=} e^{-it} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k t^{-k}\right).$$

Коэффициенты  $c_k$  просто определяются из рекуррентной системы (22.5), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} -2ic_1 - (n^2 - 1/4) = 0, \\ -2i \cdot 2c_2 - (n^2 - 1/4)c_1 + 1 \cdot 2c_1 = 0, \\ -2i \cdot 3c_3 - (n^2 - 1/4)c_2 + 2 \cdot 3c_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ -2i \cdot (k+1)c_{k+1} - (n^2 - 1/4)c_k + k(k+1)c_k = 0. \end{cases} \quad (24.4)$$

Черта над коэффициентами  $c_k$  означает комплексное сопряжение.

Из системы (24.4) находим

$$c_1 = -\frac{n^2 - 1/4}{2i \cdot 1} = \frac{1}{(-2i) \cdot 1} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{(2i) \cdot 2} \left(n^2 - \frac{1}{4} - 2\right)c_1 = \\ &= \frac{1}{(-2i)^2 \cdot 2!} \left(n - \frac{3}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{3}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= -\frac{1}{(2i) \cdot 3} \left(n^2 - \frac{1}{4} - 6\right)c_2 = \\ &= \frac{1}{(-2i)^2 \cdot 3!} \left(n - \frac{5}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{3}{2}\right) \left(n - \frac{5}{2}\right), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Учитывая, что при  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$(\alpha - k) \cdot (\alpha - k + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha + k - 1) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha - k)}, \quad (24.5)$$

коэффициенты  $c_k$  можно записать в следующем виде:

$$c_k = \frac{\Gamma(1/2 + n + k)}{k! (-2i)^k \Gamma(1/2 + n - k)}.$$

Итак, общее решение уравнения Бесселя  $u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)$  имеет следующее асимптотическое разложение при  $t \rightarrow \infty$ :

$$u(t) \stackrel{\text{as}}{=} C_1 \left( \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^{-k} \right) \right) + C_2 \left( \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}} \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \bar{c}_k t^{-k} \right) \right). \quad (24.6)$$

Однако из этого общего вида совершенно неясно, какую асимптотику имеет конкретное решение, чему конкретно равны постоянные  $C_1$  и  $C_2$ ? Например, уравнение Бесселя имеет только одно (с точностью до постоянного множителя) решение, не имеющее особенностей в нуле.

Отметим, что функция  $J_0(0) = 1$ , а при  $n > 0$   $J_n(0) = 0$ ,  $J_n(t) = t^n / (2^n n!) + o(t^n)$ .

Другими словами, поведение решения уравнения Бесселя в нуле однозначно определяет выбор этого решения, и требуется точно определить его асимптотику на бесконечности (в данном примере это означает найти значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$ ).

В общем виде такая задача называется *задачей рассеяния*. Для уравнения общего вида (21.1) такая задача, конечно, не имеет решения в явном виде, так как изменение коэффициентов уравнения на конечном участке никак не влияет на характер асимптотики общего решения, а постоянные коэффициенты при двух линейно независимых решениях с разными асимптотиками при этом изменяются. Но для некоторых конкретных уравнений задача рассеяния имеет явное решение. Для классических специальных функций, которые являются решениями линейных уравнений второго порядка, это следует из интегрального представления решений.

Типичным примером являются как раз функции Бесселя. В гл. 4 было показано, что функция

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(it \sin \tau - in\tau) d\tau$$

является решением уравнения Бесселя и имеет следующую асимптотику на бесконечности:

$$J_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \left( t - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O(t^{-3/2}).$$

Тем самым решена задача рассеяния, связывающая поведение решения в нуле и на бесконечности. Остальные члены асимптотического ряда легко получаются из выведенной выше формулы асимптотики общего решения.

Для того чтобы главный член асимптотики имел вид

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы в формуле (24.6)

$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})}.$$

Таким образом, при  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} J_n(t) \approx & \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2t)^{2k}} \frac{\Gamma(1/2 + n + 2k)}{(2k)! \Gamma(1/2 + n - 2k)} - \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin\left(t - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2t)^{2k+1}} \frac{\Gamma(3/2 + n + 2k)}{(2k+1)! \Gamma(n - 2k - 1/2)}. \end{aligned}$$

**Пример II.** Исходя из явного интегрального представления решения выводятся и формулы задачи рассеяния для уравнения Эйри, которое рассматривалось в гл. 5 и к которому в качестве примера мы снова вернемся.

Итак, для получения асимптотики решений уравнений Эйри  $u''(t) - tu = 0$  применим второе преобразование Лиувилля  $s = \frac{2}{3} t^{3/2}$ .

Уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2 u}{ds^2} t + \frac{1}{2} t^{-1/2} \frac{du}{ds} - tu = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{3s} \frac{du}{ds} - u = 0$$

(не надо забывать переходить к новой переменной в выражениях для коэффициентов!). Далее первое преобразование Лиувилля  $u(s) = s^{-1/6} v(s)$  приводит уравнение Эйри к виду

$$\frac{d^2 v}{ds^2} - v \cdot \left(1 - \frac{5}{36s^2}\right) = 0. \quad (24.7)$$

Покажем, как относительно просто (особенно по сравнению с методом, указанным в предыдущей главе) получить полное асимптотическое разложение решения, стремящегося к нулю при  $s \rightarrow \infty$ .

Пусть  $v = e^{-s} w$ . После подстановки в уравнение (24.7) получается уравнение

$$\frac{d^2 w}{ds^2} - 2 \frac{dw}{ds} + \frac{5}{36s^2} w = 0.$$

Выше доказано, что функция  $w(s)$  разлагается в асимптотический ряд

$$w(s) \approx \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^{-k}\right),$$



а коэффициенты  $c_k$  находятся из рекуррентной системы, которая получается, если ряд подставить в уравнение и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ .

Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 2c_1 + \frac{5}{36} = 0, \\ 2 \cdot 2c_2 + \frac{5}{36} c_1 + 2c_1 = 0, \\ 2 \cdot 3c_3 + \frac{5}{36} c_2 + 2 \cdot 3c_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ 2 \cdot (k+1)c_{k+1} + \frac{5}{36} c_k + k(k+1)c_k = 0. \end{cases} \quad (24.8)$$

Отсюда, с учетом формулы (24.5), получим

$$c_1 = -\frac{5}{36 \cdot 2} = \frac{\Gamma(5/6+1)}{\Gamma(5/6-1) \cdot 2}, \quad c_2 = \frac{5 \cdot 7 \cdot 11}{36^2 \cdot 2 \cdot 2^2} = \frac{\Gamma(5/6+2)}{\Gamma(5/6-2) \cdot 2 \cdot 2^2}, \quad \dots, \\ c_k = \frac{\Gamma(5/6+k)}{\Gamma(5/6-k) \cdot k! \cdot 2^k}.$$

Таким образом,

$$v(s) \stackrel{\text{as}}{=} \exp(-s)s^{-1/6} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(5/6+k)}{k! 2^k \Gamma(5/6-k) s^k} \right), \quad s \rightarrow \infty.$$

Если перейти к первоначальной переменной  $t = (3s/2)^{2/3}$ , то решение уравнения Эйри, стремящееся к нулю при  $s \rightarrow \infty$ , имеет следующее асимптотическое разложение:

$$u(t) \stackrel{\text{as}}{=} \exp\left(-\frac{2}{3} t^{3/2}\right) \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(5/6+k) 3^k}{k! 4^k \Gamma(5/6-k) t^{3k/2}} \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Такое решение единственно с точностью до постоянного множителя и поэтому однозначно определяется главным членом асимптотики.

Как показано в предыдущей главе, асимптотика решения  $\text{Ai}(t)$  уравнения Эйри, стремящегося к нулю на бесконечности, имеет следующий вид:

$$\text{Ai}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(it\xi + i\frac{\xi^3}{3}\right) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3} t^{3/2}\right) t^{-1/4} (1 + O(t^{-3/2})).$$

Следовательно, полное асимптотическое разложение

$$\text{Ai}(t) \stackrel{\text{as}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3} t^{3/2}\right) t^{-1/4} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(5/6+k) 3^k}{\Gamma(5/6-k) t^{3/2 k} 4^k k!} \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Совершенно аналогично получается и асимптотика решений уравнения Эйри при  $t \rightarrow -\infty$ . Для удобства вычислений можно заменить независимую переменную  $t = -\tau$  (тогда  $\tau \rightarrow \infty$ ), после чего уравнение приобретает вид:  $u''(\tau) + \tau u = 0$ .

Преобразования  $s = \frac{2}{3}\tau^{3/2}$ ,  $u = s^{-1/6}v(s)$ ,  $v = e^{is}w$  приводят к следующему уравнению:

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + 2i \frac{dw}{ds} + \frac{5}{36s^3} w = 0.$$

Для коэффициентов  $d_k$  асимптотического разложения

$$w(s) \stackrel{\text{as}}{=} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k s^{-k}\right)$$

получается рекуррентная система уравнений:

$$-2id_1 + \frac{5}{36} = 0, \quad -2 \cdot 2d_2i + \frac{5}{36}d_1 + 2d_1 = 0, \quad \dots,$$

которая аналогична системе (24.8). В результате получим

$$d_k = i^k \frac{\Gamma(5/6 + k)}{\Gamma(5/6 - k) \cdot k! \cdot 2^k},$$

$$u \stackrel{\text{as}}{=} \exp\left(\frac{2}{3}\tau^{3/2}i\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(5/6 + k)3^k i^k}{\Gamma(5/6 - k)\tau^{3/2k}4^k k!}\right), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Таким образом, уравнение Эйри имеет два решения:  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , обладающие следующими асимптотиками:

$$u_1(t) \stackrel{\text{as}}{=} |t|^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}|t|^{3/2}i\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(5/6 + k)3^k i^k}{\Gamma(5/6 - k)|t|^{3/2k}4^k k!}\right), \quad t \rightarrow -\infty,$$

$$u_2(t) \stackrel{\text{as}}{=} |t|^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}|t|^{3/2}i\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(5/6 + k)3^k (-i)^k}{\Gamma(5/6 - k)|t|^{3/2k}4^k k!}\right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Общее решение имеет вид:  $C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)$ , но из общего вида асимптотики непонятно, чему равны постоянные  $C_1$  и  $C_2$  для конкретного решения, которое стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . В этом и состоит, в данном случае, задача рассеяния. Она фактически была решена в гл. 5 после исследования явного интегрального представления функции  $\text{Ai}(t)$ . Здесь только показано, как легко искать все члены асимптотического разложения решения.

Как показано в § 20, главный член асимптотики этой функции —  $2\sqrt{\pi} |t|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|t|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)$ . Следовательно,

$$C_1 = \sqrt{\pi} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right), \quad C_2 = \sqrt{\pi} \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right),$$

и полная асимптотика функции Эйри при  $t \rightarrow -\infty$  следующая:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(t) \stackrel{\text{as}}{=} 2\sqrt{\pi} |t|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|t|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) t^{-1/4} \times \\ \times \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(5/6 + 2k) 3^{2k} (-1)^k}{\Gamma(5/6 - 2k) |t|^{3k} 4^{2k} (2k)!}\right) - 2\sqrt{\pi} \sin\left(\frac{2}{3}|t|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) t^{-1/4} \times \\ \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(5/6 + 2k + 1) 3^{2k+1} (-1)^k}{\Gamma(5/6 - 2k - 1) |t|^{3k+3/2} 4^{2k+1} (2k+1)!}\right). \end{aligned}$$

Тем самым, для уравнения Эйри задача рассеяния полностью решена: для решения, экспоненциально быстро стремящегося к нулю на  $\infty$ , указана точная асимптотика на  $-\infty$ .<sup>1)</sup>

**Пример III.** Приведем еще один пример уравнения с быстро растущим коэффициентом:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \operatorname{sh} 2t \cdot u = 0. \quad (24.9)$$

Второе преобразование Лиувилля удобно делать не стандартным образом ( $(s'(t))^2 = 2 \operatorname{sh} 2t$ ), так как в этом случае трудно выписать явное выражение для функции  $s(t)$ . Можно учесть, что главный член в выражении  $2 \operatorname{sh} 2t = e^{2t} - e^{-2t}$  — это  $e^{2t}$ , а  $e^{-2t}$  намного меньше по порядку. Поэтому удобно сделать такую замену переменной:  $(s'(t))^2 = e^{2t}$ , т. е.  $s = e^t$ . После этого уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2 u}{ds^2} e^{2t} + \frac{du}{ds} e^t + (e^{2t} - e^{-2t})u = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{du}{ds} + (1 - s^{-4})u = 0.$$

Если сделать первую замену Лиувилля  $u = v s^{-1/2}$ , то получится следующее уравнение для функции  $v$ :

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \left(1 + \frac{3}{4} s^{-2} - s^{-4}\right)u = 0,$$

и к нему можно применить метод, рассмотренный в § 21.

Получим асимптотический ряд  $v = e^{is} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^{-k}\right)$ , где все коэффициенты  $c_k$  легко находятся:  $c_1 = -\frac{3}{8}i$ ,  $c_2 = -\frac{33}{128}$ ,  $c_3 = \frac{1}{16} + \frac{99}{2048}i$  и т. д.

<sup>1)</sup> Поиск решения задачи рассеяния для нелинейных уравнений — неизмеримо более сложная проблема. В последние годы эта задача много и успешно исследовалась для уравнений Пенлеве в связи с важными применениями этих уравнений в математической физике (см., например, [9]).

Окончательно получаем решение уравнения (24.9):

$$u_1(t) \stackrel{\text{as}}{=} \exp\left(-\frac{1}{2}t + ie^t\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-kt}\right), \quad t \rightarrow \infty,$$

и комплексно-сопряженное к нему решение  $u_2(t)$ .

## § 25. Метод ВКБ

Название «метод ВКБ» (или «метод WKBJ», «метод WKBJ»<sup>1)</sup>) обычно связывают с построением асимптотики решения уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + Q(t)u = 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (25.1)$$

в виде специального ряда.

Если  $Q(t) > 0$ , то

$$u(t) \approx Q(t)^{-1/4} \exp(iS(t)), \quad S'(t) = \sqrt{Q(t)}. \quad (25.2)$$

Если к уравнению (25.1) применить сначала второе, а потом первое преобразования Лиувилля, описанные в предыдущем параграфе, то главный член асимптотики будет иметь как раз вид (25.2). Вероятно, поэтому более естественным является также бытующее название «метод Лиувилля–Грина».

Покажем, к чему приводит путь последовательного применения преобразований Лиувилля.

**Теорема 25.1.** Пусть коэффициент  $Q(t) > 0$  в уравнении (25.1) обладает следующими свойствами:

а)  $Q(t) \in C^\infty([t_0; \infty))$ ,

б)  $\exists \alpha > 0$ , такое что  $S(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{Q(\tau)} d\tau \rightarrow \infty$ ,  $t = o(S(t)^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ ,  
при  $t \rightarrow \infty$ ,

в)  $\exists \gamma > 1$ , такое что  $\frac{[Q'(t)]^2}{[Q(t)]^3} + \frac{|Q''(t)|}{[Q(t)]^2} = O(S(t)^{-\gamma})$ ,  $t \rightarrow \infty$ ,

г) Существует формальное асимптотическое решение уравнения (25.1) вида

$$Q(t)^{-1/4} \exp(iS(t)) \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t)\right), \quad t \rightarrow \infty,$$

где  $\varphi_k(t)$  — калибровочные функции.

<sup>1)</sup> Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна и Джеффриса.

Тогда существует решение уравнения (25.1), для которого это формальное асимптотическое решение является асимптотическим разложением при  $t \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Перейдем в уравнении (25.1) к новой независимой переменной:

$$s = S(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{Q(\tau)} \, d\tau, \quad (25.3)$$

после чего уравнение (25.1) приобретает вид

$$\frac{d^2 u}{ds^2} Q(t) + \frac{1}{2} Q(t)^{-1/2} Q'(t) \frac{du}{ds} + Q(t) u = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 u}{ds^2} + a(s) \frac{du}{ds} + u = 0,$$

где  $a(s) = \frac{1}{2} Q'(t) Q(t)^{-3/2}$  при зависимости  $s$  от  $t$  вида (25.3).

После замены

$$u = v(s) Q(t)^{-1/4},$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{dv}{ds} Q(t)^{-1/4} - \frac{1}{4} v(s) Q(t)^{-5/4} \frac{dQ}{dt} \frac{dt}{ds} = \\ &= \frac{dv}{ds} Q(t)^{-1/4} - \frac{1}{4} v(s) Q(t)^{-7/4} \frac{dQ}{dt}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{ds^2} &= \frac{d^2 v}{ds^2} Q(t)^{-1/4} - \frac{1}{2} \frac{dv}{ds} Q(t)^{-7/4} \frac{dQ}{dt} - \frac{1}{4} v(s) Q(t)^{-7/4} \frac{d^2 Q}{dt^2} Q(t)^{-1/2} + \\ &+ \frac{7}{16} v(s) Q(t)^{-11/4} \left( \frac{dQ}{dt} \right)^2 Q(t)^{-1/2} \end{aligned}$$

получим новое уравнение для функции  $v(s)$ :

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + v \left( 1 + \frac{5}{16} \frac{Q'(t)^2}{Q(t)^3} - \frac{1}{4} \frac{Q''(t)}{Q(t)^2} \right) = 0,$$

где  $s$  связана с  $t$  формулой (25.3).

Согласно замечанию в § 23 условие, сформулированное в теореме, является достаточным для того, чтобы формальный ряд (если он существует) являлся асимптотическим разложением некоторого решения уравнения (25.1). ▀

**З а м е ч а н и е 1.** Легко проверить, что условия (б) и (в) теоремы выполняются для очень широкого класса функций. В частности, они выполнены

— для любых полиномов, которые стремятся к  $\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ ,

— для функций  $Q(t)$ , которые разлагаются при  $t \rightarrow \infty$  в асимптотические ряды (допускающие почленное дифференцирование) вида

$$Q(t) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\gamma_k}, \quad \gamma_{k+1} > \gamma_k, \quad a_0 > 0, \quad \gamma_0 > -2,$$

для функций вида  $Q(t) = \exp P_k(t)$ ,  $Q(t) = \exp(\exp P_l(t))$ ,  $Q(t) = \exp[P_k(t) \exp P_l(t)]$  и т. п., где  $P_i(t)$  — полиномы, лишь бы  $Q(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Проще всего искать формальное асимптотическое решение уравнения (25.1), не переходя к новой переменной. Достаточно сделать замену неизвестной функции:

$$u(t) = w(t)Q(t)^{-1/4} \exp(iS(t)),$$

$$\frac{du}{dt} = \left( \frac{dw}{dt} Q(t)^{-1/4} - \frac{1}{4} w Q(t)^{-5/4} Q'(t) + i w Q(t)^{1/4} \right) \exp(iS(t)),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} = & \left( \frac{d^2 w}{dt^2} Q(t)^{-1/4} - \frac{1}{2} \frac{dw}{dt} Q(t)^{-5/4} Q'(t) + \frac{5}{16} w Q(t)^{-9/4} [Q'(t)]^2 - \right. \\ & - \frac{1}{4} w Q(t)^{-5/4} Q''(t) + i \frac{dw}{dt} Q(t)^{1/4} + i \frac{1}{4} w Q(t)^{-3/4} Q'(t) + i \frac{dw}{dt} Q(t)^{1/4} - \\ & \left. - i \frac{1}{4} w Q(t)^{-3/4} Q'(t) - w Q(t)^{3/4} \right) \exp(iS(t)). \end{aligned}$$

Решение  $w(t)$  получившегося уравнения

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{dw}{dt} \left( 2i Q(t)^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{Q'(t)}{Q(t)} \right) + w \left( \frac{5}{16} \frac{[Q'(t)]^2}{[Q(t)]^2} - \frac{1}{4} \frac{Q''(t)}{Q(t)} \right) = 0$$

зачастую можно найти в виде формального ряда, первый член которого равен единице.

*В качестве поучительного примера рассмотрим уравнение*

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (t + \sin t)u = 0. \quad (25.4)$$

После замены

$$u(t) = w(t)(t + \sin t)^{-1/4} \exp\left(i \int_1^t \sqrt{\zeta + \sin \zeta} d\zeta\right)$$

для функции  $w(t)$  получается уравнение

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + p(t) \frac{dw}{dt} + q(t)w = 0, \quad (25.5)$$

где

$$p(t) = 2i(t + \sin t)^{1/2} - \frac{1 + \cos t}{2(t + \sin t)}, \quad q(t) = \frac{5}{16} \frac{(1 + \cos t)^2}{(t + \sin t)^2} + \frac{\sin t}{4(t + \sin t)}.$$

Коэффициенты  $p(t)$ ,  $q(t)$  разложим в ряды при  $t \rightarrow \infty$ :

$$p(t) = \sum_{k=-1}^{\infty} R_k(t)t^{-k/2}, \quad q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k(t)t^{-k},$$

где

$$R_{-1} = 2i, \quad R_0 = 0, \quad R_1 = i \sin t, \quad R_2 = -\frac{1}{2}(1 + \cos t), \quad R_3 = -\frac{i}{4} \sin^2 t,$$

$$R_4 = \frac{1}{2} \sin t(1 + \cos t), \quad R_5 = \frac{i}{8} \sin^3 t, \quad R_6 = -\frac{1}{2}(1 + \cos t) \sin^2 t, \quad \dots,$$

$$L_1 = \frac{1}{4} \sin t, \quad L_2 = \frac{5}{16}(1 + \cos t)^2 - \frac{1}{4} \sin^2 t,$$

$$L_3 = \frac{1}{4} \sin^3 t - \frac{5}{8} \sin t(1 + \cos t)^2, \quad \dots$$

Асимптотическое разложение решения  $w(t)$  будем искать в виде

$$w(t) \stackrel{\text{as}}{=} 1 + \sum_{k=3}^{\infty} g_k(t)t^{-k/2}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где  $g_k(t)$  — периодические с периодом  $2\pi$  (и, следовательно, ограниченные) функции. Тогда

$$w'(t) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=3}^{\infty} \left( g'_k(t) - \frac{(k-2)g_{k-2}}{2} \right) t^{-k/2}, \quad t \rightarrow \infty, \quad g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0,$$

$$w''(t) \stackrel{\text{as}}{=} g''_3(t)t^{-3/2} + g''_4(t)t^{-2} + \\ + \sum_{k=5}^{\infty} \left( g''_k(t) - (k-2)g'_{k-2} + \frac{(k-2)(k-4)g_{k-4}}{4} \right) t^{-k/2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

После подстановки этих рядов в уравнение (25.5) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $t$  получается рекуррентная система уравнений:

$$2ig'_3 + \frac{1}{4} \sin t = 0, \quad 2ig'_4 + g''_3 = 0,$$

$$2i \left( g'_5 - \frac{3}{2} g_3 \right) + ig'_3 \sin t + \frac{5}{16} (1 + \cos t)^2 - \frac{1}{4} \sin^2 t + g''_4 = 0,$$

$$2i(g'_6 - 2g_4) + ig'_4 \sin t - \frac{1}{2} g'_3(1 + \cos t) + \frac{1}{4} g_3 \sin t + g''_5 - 3g'_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& 2i\left(g_7' - \frac{5}{2}g_5\right) + i\left(g_5' - \frac{3}{2}g_3\right)\sin t - \frac{1}{2}g_4'(1 + \cos t) - \frac{i}{4}g_3'\sin^2 t + \\
& \quad + \frac{1}{4}\sin^3 t - \frac{5}{8}\sin t(1 + \cos t)^2 + \frac{1}{4}g_4\sin t + g_6'' - 4g_4' = 0, \\
& 2i(g_8' - 3g_6) + i(g_6' - 2g_4)\sin t - \frac{1}{2}\left(g_5' - \frac{3}{2}g_3\right)(1 + \cos t) - \frac{i}{4}g_4'\sin^2 t + \\
& \quad + \frac{1}{2}g_3'\sin t(1 + \cos t) + \frac{1}{4}g_5\sin t + g_3\left[\frac{5}{16}(1 + \cos t)^2 - \frac{1}{4}\sin^2 t\right] + g_7'' - \\
& \quad - 5g_5' + \frac{15}{4}g_3 = 0, \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Далее предстоит последовательно решать уравнения этой системы. При этом важно следить, чтобы решения были ограничены!

Итак,  $g_3 = -\frac{1}{8}i\cos t + A_3$ . Постоянная  $A_3$  пока произвольная. Функция  $g_4 = -\frac{1}{16}\sin t + A_4$ . Постоянная  $A_4$  тоже пока произвольная. Уравнение для функции  $g_5$  имеет вид

$$\begin{aligned}
& 2ig_5' - 3i\left(-\frac{1}{8}i\cos t + A_3\right) - \frac{1}{8}\sin^2 t + \frac{5}{16}(1 + \cos t)^2 - \frac{1}{4}\sin^2 t + \\
& \quad + \frac{1}{16}\sin t = 0.
\end{aligned}$$

Для того чтобы решение  $g_5$  было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы интеграл от суммы всех слагаемых в левой части уравнения по отрезку  $[0; 2\pi]$  был равен нулю. Значит,

$$-3iA_3 - \frac{1}{16} + \frac{5}{16} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{8} = 0.$$

Из этого условия следует, что  $A_3 = -\frac{3i}{32}$ , а

$$g_5 = i\left(\frac{1}{8}\sin t + \frac{11}{128}\sin 2t - \frac{1}{32}\cos t\right) + A_5.$$

Продолжая процесс решения уравнений для  $g_k(t)$ , можно таким образом найти все ограниченные решения  $g_k(t)$ .

Несколько первых членов этого асимптотического разложения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
u(t) = (t + \sin t)^{-1/4} \exp\left(i \int_1^t (\tau + \sin \tau)^{1/2} d\tau\right) & \left(1 - \frac{i\cos t}{8t^{3/2}} - \frac{3i}{32t^{3/2}} - \right. \\
& \left. - \frac{\sin t}{16t^2} + it^{-5/2} \frac{16\sin t + 11\sin 2t - 4\cos t}{128} + it^{-5/2} \frac{1}{640} + O(t^{-3})\right).
\end{aligned}$$



Доказательство того факта, что полученный формальный ряд является асимптотическим разложением истинного решения уравнения (25.4), можно получить последовательным применением преобразований Лиувилля и ссылкой на замечание § 23.

**З а м е ч а н и е 3.** Тем же способом, который указан в теореме 25.1, при таких же условиях на функцию  $Q$  можно получить асимптотику решений уравнения  $\frac{d^2 u}{dt^2} - Q(t)u = 0$ .

Главные члены асимптотических разложений этих решений равны  $Q(t)^{-1/4} \exp(S(t))$  или  $Q(t)^{-1/4} \exp(-S(t))$ , где  $S'(t) = Q(t)^{1/2}$ .

**З а м е ч а н и е 4.** Термин «метод ВКБ» часто (даже чаще, чем к рассмотренному выше случаю больших значений независимой переменной) применяется к исследованию уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda^2 Q(t)u = 0$$

на конечном отрезке при условии, что  $Q(t) > 0$ , а параметр  $\lambda \rightarrow \infty$ . Асимптотика решения может быть построена способом, вполне аналогичным изложенному выше. Асимптотическое разложение решения имеет следующий вид:

$$u(t, \lambda) \stackrel{\text{as}}{=} Q(t)^{-1/4} \exp(i\lambda S(t)) \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \lambda^{-k} \right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

**З а м е ч а н и е 5.** Другие преобразования линейных дифференциальных уравнений, позволяющие найти асимптотику их решений, приведены в глубокой и содержательной монографии [16].

## Глава 7

### СИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ

#### § 26. Сингулярные краевые задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Постановка задачи. Оценка решения

В этой главе будут рассматриваться краевые задачи следующего вида: уравнение

$$L_\epsilon u \equiv \epsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f(x) \quad (26.1)$$

на отрезке  $[a; b]$  и краевые условия одного из трех типов:

- а)  $l_1 u \equiv u(a) = A_1$ ,  $l_2 u \equiv u(b) = A_2$  или
- б)  $l_1 u \equiv u(a) - h_1 u'(a) = A_1$ ,  $l_2 u \equiv u(b) + h_2 u'(b) = A_2$ ,  $h_1 > 0$ ,  $h_2 > 0$  или
- в)  $l_1 u \equiv -u'(a) = A_1$ ,  $l_2 u \equiv u'(b) = A_2$ .

Коэффициенты  $p(x)$ ,  $q(x)$  и правая часть  $f(x)$  всюду далее будут предполагаться непрерывными на отрезке  $[a; b]$ . Параметр  $\epsilon > 0$  всюду в следующих параграфах будет считаться достаточно малым ( $\epsilon \ll 1$ ). В этом и состоит главное содержание настоящей главы, именно при  $\epsilon \rightarrow 0$  задача становится сингулярной.<sup>1)</sup> И хотя зависимость от  $\epsilon$  нерегулярная, будет показано, что решение краевой задачи при дополнительных предположениях разлагается в асимптотический ряд по малому параметру  $\epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

<sup>1)</sup> Слово «сингулярный» является почти противоположным по значению слову «регулярный». Известно, например, что решение начальной задачи для уравнения  $u'' = F(x, u, u', \epsilon)$  «регулярно» зависит от переменной  $x$  и от параметра  $\epsilon$ . Под этим понимается следующее: если функция  $F(x, u, u', \epsilon)$  имеет достаточно большое число производных, то и решение многократно дифференцируемо как по  $x$ , так и по параметру  $\epsilon$ . Если  $F(x, u, u', \epsilon)$  аналитична, то и решение разлагается в сходящийся степенной ряд. Если уравнение (26.1) записать в каноническом виде  $u'' = \epsilon^{-1}(f(x) - p(x)u' - q(x)u)$ , то правая часть нерегулярна относительно  $\epsilon$  и решение, вообще говоря, не разлагается в степенной ряд по  $\epsilon$ .

Однако в этом вводном параграфе малость параметра  $\varepsilon$  почти нигде не будет учитываться, теоремы носят общий характер и справедливы для любого  $\varepsilon > 0$ .

Прежде всего отметим, что краевая задача для уравнения (26.1) с одним из краевых условий (а), (б) или (в), в отличие от начальной задачи, не всегда имеет решение.

Например, простейшая задача  $\varepsilon u''(x) + u(x) = 0$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(\pi) = 1$  не имеет решения, если  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{9}$  и, вообще, для всех  $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$ .

Тем не менее для каждой из рассматриваемых задач справедлива так называемая альтернатива Фредгольма. Она имеет весьма общий характер и состоит в следующем.

Пусть  $A$  — линейный оператор, переводящий линейное пространство  $L$  в линейное пространство  $M$ . Говорят, что для уравнения  $AU = F$  справедлива *альтернатива Фредгольма*, если выполняется только один из следующих вариантов:

1) для любого элемента  $F \in M$  существует решение  $u \in L$  уравнения  $AU = F$  и однородное уравнение  $AU = 0$  имеет *только* нулевое решение.<sup>1)</sup>

2) существует элемент  $F \in M$ , такой что уравнение  $AU = F$  не имеет решения и однородное уравнение  $AU = 0$  имеет решение  $U_0 \neq 0$ .

Альтернатива Фредгольма справедлива для широкого класса линейных уравнений. Самым простым примером является система  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными. Если определитель коэффициентов при неизвестных не равен нулю, то выполняется первый вариант альтернативы, а если он равен нулю — то второй. Рассматриваемая здесь краевая задача (26.1) также легко сводится к этому случаю.

**Теорема 26.1.** *Краевые задачи для уравнения (26.1) с любым из краевых условий (а)–(в) удовлетворяют альтернативе Фредгольма.*

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{u}(x)$  — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (26.1). Как известно, при наложенных выше условиях такое решение существует. Тогда общее решение уравнения (26.1):  $u(x) = \tilde{u}(x) + C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$ , где  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  — два каких-либо линейно независимых решения однородного уравнения  $L_\varepsilon u = 0$ . Поэтому для того чтобы существовало решение урав-

<sup>1)</sup> Первую часть предложения можно условно назвать существованием решения, а вторую — единственностью решения. Таким образом, жаргонная формулировка альтернативы Фредгольма: существование и единственность решения уравнения эквивалентны.

нения (26.1), удовлетворяющее одному из краевых условий (а), (б) или (в), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два равенства:

$$l_1 \tilde{u}(x) + C_1 l_1 u_1(x) + C_2 l_1 u_2(x) = A_1,$$

$$l_2 \tilde{u}(x) + C_1 l_2 u_1(x) + C_2 l_2 u_2(x) = A_2.$$

Это, по сути дела, два линейных алгебраических уравнения с двумя неизвестными,  $C_1$  и  $C_2$ . Например, в случае краевых условий (а) они имеют вид

$$\tilde{u}(a) + C_1 u_1(a) + C_2 u_2(a) = A_1,$$

$$\tilde{u}(b) + C_1 u_1(b) + C_2 u_2(b) = A_2.$$

Отсюда сразу вытекает, что если

$$\det \begin{pmatrix} l_1 u_1(x) & l_1 u_2(x) \\ l_2 u_1(x) & l_2 u_2(x) \end{pmatrix} \neq 0,$$

то выполняется первый вариант альтернативы, а если

$$\det \begin{pmatrix} l_1 u_1(x) & l_1 u_2(x) \\ l_2 u_1(x) & l_2 u_2(x) \end{pmatrix} = 0,$$

то второй вариант, так как в силу линейной независимости решений  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  равенства  $C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) \equiv 0$  и  $C_1 = C_2 = 0$  эквивалентны. ▼

**Л е м м а 26.1.** Пусть  $L_\epsilon$  — оператор (26.1), где  $q(x) < 0$ , а функция  $v(x) \in C^2([a; b])$  удовлетворяет неравенствам:  $L_\epsilon v(x) \leq 0$  при  $x \in [a; b]$ ,  $l_1 v \geq 0$ ,  $l_2 v \geq 0$ , где  $l_1$  и  $l_2$  — это граничные операторы одного из краевых условий (а), (б) или (в). Тогда  $v(x) \geq 0$  всюду на отрезке  $[a; b]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Допустим противное: функция в какой-нибудь точке отрезка  $[a; b]$  принимает отрицательное значение. Тогда и минимум этой функции, который достигается в какой-нибудь точке  $c \in [a; b]$ , тоже отрицателен.

Если точка  $c$  лежит на границе отрезка, то в случае (а) это противоречит краевым неравенствам.

В случае (б) это также противоречит краевым неравенствам. Действительно, если отрицательный минимум достигается на левом конце отрезка, то  $v'(a) \geq 0$  и, следовательно,  $v(a) - h_1 v'(a) < 0$ , а по условию  $v(a) - h_1 v'(a) \geq 0$ . К аналогичному противоречию приводит и предположение о том, что отрицательный минимум достигается на правом конце отрезка.

Осталось рассмотреть лишь случай, когда отрицательный минимум достигается во внутренней точке отрезка, а при условии (в) и случай, когда отрицательный минимум достигается на границе.

Оба этих случая рассматриваются единым образом. Пусть отрицательный минимум функции  $v(x)$  достигается в точке  $c \in (a; b)$ . Тогда  $v'(c) = 0$ ,  $v''(c) \geq 0$  и, следовательно,  $L_\varepsilon v(x)|_{x=c} \geq q(c)v(c) > 0$ , что противоречит условию леммы.

Если выполняется граничное неравенство (в) и отрицательный минимум функции  $v(x)$  достигается на границе, то согласно условию (в) на левом конце  $v'(a) \leq 0$ , значит,  $v'(a) = 0$ ,  $v''(a) \geq 0$  (на правом конце  $v'(b) \geq 0$ , значит,  $v'(b) = 0$ ,  $v''(b) \geq 0$ ). Дальнейшее приведение к противоречию такое же, как и в случае внутренней точки минимума. ▼

**Теорема 26.2.** Если в уравнении (26.1) коэффициент  $q(x) < -\gamma < 0$ , то решение любой из задач (26.1), (а) или (26.1), (б) при любых  $f(x) \in C([a; b])$ ,  $A_1, A_2$  существует, единственно и для него справедлива оценка

$$|u(x)| \leq \max_{[a; b]} \frac{|f(x)|}{\gamma} + |A_1| + |A_2|. \quad (26.2)$$

**Доказательство.** Правую часть неравенства (26.2) обозначим  $\rho$  и рассмотрим вспомогательные функции  $W_\pm(x) = \rho \pm u(x)$ . Проверим, что для этих функций выполняются условия леммы.

Действительно,

$$L_\varepsilon W_\pm(x) = \rho q(x) \pm f(x) \leq -\rho\gamma + \max_{[a; b]} |f(x)| \leq 0.$$

В случае краевых условий (а) и (б)  $l_1 W_\pm(x) = \rho \pm A_1 \geq 0$ ,  $l_2 W_\pm(x) = \rho \pm A_2 \geq 0$ . Следовательно,  $W_\pm(x) \geq 0 \implies |u(x)| \leq \rho$ .

Из оценки (26.2) вытекает единственность решений задач (26.1), (а) и (26.1), (б), а из их фредгольмовости вытекает существование решений этих задач при любых  $A_1, A_2$  и  $f(x) \in C([a; b])$ . ▼

Доказательство оценки решения задачи (26.1), (в) проводится аналогично тем, которые проведены в теореме 26.2, но требует небольшого уточнения.

**Теорема 26.3.** Если в уравнении (26.1) коэффициент  $q(x) < -\gamma < 0$ ,  $\varepsilon \in (0; 1)$ , то решение задачи (26.1), (в) при любых  $f(x) \in C([a; b])$ ,  $A_1, A_2$  существует и единственно. Существует положительная постоянная  $M_1$ , зависящая лишь от  $(b - a)$  и  $\max_{[a; b]} |p(x)|$ , такая что для решения задачи (26.1), (в) справедлива оценка

$$|u(x)| \leq M_1 \left( \max_{[a; b]} \frac{|f(x)|}{\gamma} + |A_1| + |A_2| \right). \quad (26.3)$$

**Доказательство.** Как и при доказательстве предыдущей теоремы, введем обозначения:  $\rho = \max_{[a; b]} \frac{|f(x)|}{\gamma} + |A_1| + |A_2|$ ,  $s(x) =$

$= \left(x - \frac{1}{2}(a+b)\right)^2$  и рассмотрим вспомогательные функции  $W_{\pm}(x) = M\rho(1 + \beta s(x)) \pm u(x)$ .

Проверим, что для этих функций при достаточно малой постоянной  $\beta$  и достаточно большой постоянной  $M$  выполняются условия леммы. Действительно,

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon} W_{\pm}(x) &= M\rho \left( 2\varepsilon\beta + \beta p(x)s'(x) + q(x)(1 + \beta s(x)) \right) \pm f(x) \leq \\ &\leq [q < 0] \leq M\rho \left( 2\varepsilon\beta + \beta(b-a) \max_{[a;b]} |p(x)| + q(x) \right) \pm f(x) < \\ &< -\frac{M\rho}{2} \gamma \pm f(x) \end{aligned}$$

при достаточно малом  $\beta$ . Но

$$l_1 W_{\pm}(x) = -W'_{\pm}(a) = -M\beta\rho s'(a) \pm A_1 = M\beta\rho(b-a) \pm A_1,$$

$$l_2 W_{\pm}(x) = W'_{\pm}(b) = M\beta\rho s'(b) \pm A_2 = M\beta\rho(b-a) \pm A_2.$$

Поэтому при достаточно большой постоянной  $M$ , зависящей лишь от величин, указанных в условии теоремы,

$$L_{\varepsilon} W_{\pm}(x) < 0, \quad l_1 W_{\pm}(x) > 0, \quad l_2 W_{\pm}(x) > 0.$$

Следовательно,  $W_{\pm}(x) \geq 0 \implies |u(x)| \leq M\rho(1 + \beta s(x)) \leq M_1\rho$ .

Из оценки (26.3) вытекает единственность решения задачи (26.1), (в), а из ее фредгольмовости вытекает существование решения задачи при любых  $f(x) \in C([a;b])$ ,  $A_1$  и  $A_2$ . ▀

**Теорема 26.4.** Пусть в уравнении (26.1) коэффициент  $p(x) \neq 0$ . Тогда существует достаточно малое  $\varepsilon_0 > 0$ , такое что при всех положительных  $\varepsilon < \varepsilon_0$  существует решение задачи (26.1), (а), для которого справедлива оценка (26.3). При этом константы  $M_1$  и  $\gamma$  не зависят от  $\varepsilon$ .

**Доказательство.** Без ограничения общности будем считать, что  $p(x) > 0$  и, значит,  $p(x) > p_0 > 0$ . (В другом случае, когда  $p(x) < 0$ , после замены  $x$  на  $-x$  знак коэффициента при первой производной меняется и мы приходим к тому же случаю.)

Сделаем замену искомой функции  $u(x) = z(x)v(x)$ , где фиксированную функцию  $z(x) > 0$  надо подобрать так, чтобы для новой неизвестной функции  $v(x)$  была справедлива теорема 26.2. Уравнение (26.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon z(x) \frac{d^2 v}{dx^2} + 2\varepsilon \frac{dz}{dx} \frac{dv}{dx} + \varepsilon \frac{d^2 z}{dx^2} v(x) + p(x) z(x) \frac{dv}{dx} + p(x) \frac{dz}{dx} v + \\ + q(x) z(x) v = f(x), \end{aligned}$$

или

$$\varepsilon \frac{d^2 v}{dx^2} + \left( 2\varepsilon \frac{1}{z(x)} \frac{dz}{dx} + p(x) \right) \frac{dv}{dx} + \frac{1}{z(x)} (L_\varepsilon z(x)) v = \frac{f(x)}{z(x)}.$$

Таким образом, новая неизвестная функция удовлетворяет такому же уравнению, как и уравнение (26.1), но теперь коэффициент при неизвестной функции не  $q(x)$ , а  $\frac{1}{z(x)} (L_\varepsilon z(x))$ .

Граничные значения для функции  $v(x)$  имеют вид:  $v(a) = \frac{A_1}{z(a)}$ ,  $v(b) = \frac{A_2}{z(b)}$ . Поэтому для окончания доказательства достаточно подобрать такую функцию  $z(x)$ , чтобы  $L_\varepsilon z(x) < 0$ . Если  $p(x) > p_0 > 0$ , то это совсем нетрудно сделать. Достаточно положить  $z(x) = e^{-\alpha x}$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда

$$L_\varepsilon z(x) = (\varepsilon \alpha^2 - p(x)\alpha + q(x))z(x) < 0,$$

если сначала выбрать такое большое  $\alpha$ , чтобы  $-p(x)\alpha + q(x) < -\frac{1}{2} p_0 \alpha$ , а затем настолько малое  $\varepsilon_0$ , чтобы  $\varepsilon_0 \alpha^2 < \frac{1}{4} p_0 \alpha$ . При этом значение  $\alpha$  можно взять одно для всех  $\varepsilon < \varepsilon_0$ .<sup>1)</sup> ▼

## § 27. Построение и обоснование асимптотического ряда решения сингулярной краевой задачи

Здесь будут рассмотрены краевые задачи для уравнения (26.1) в двух случаях:

- 1)  $q(x) < 0$ ,  $p(x) \equiv 0$  и
- 2)  $p(x) \neq 0$ .

Всюду в этой главе, для того чтобы можно было строить асимптотические ряды решений, коэффициенты уравнения и его правая часть предполагаются бесконечно дифференцируемыми. (Впрочем, как и в предыдущих главах, можно ограничиться наличием конечного числа производных. Но тогда вместо асимптотического ряда надлежит

<sup>1)</sup> Нетрудно привести примеры, когда задача (26.1), (в), вообще говоря, не будет иметь решения, если нарушено требуемое в теореме 26.2 условие отрицательности коэффициента  $q(x)$ . Самый простой пример — это уравнение  $\varepsilon u'' + u' = 1$ ,  $u'(0) = u'(1) = 0$ . Общее решение этого уравнения имеет вид  $x + C_1 + C_2 e^{-x/\varepsilon}$ , поэтому не существует таких констант, при которых удовлетворяются оба граничных условия. Решение задачи (26.1), (б), вообще говоря, имеет решение, но его асимптотика намного сложнее, чем та, которая будет получена ниже в § 27 для решения задачи (26.1), (а).

довольствоваться конечным асимптотическим представлением с остаточным членом конечного порядка.)

*Первый случай* наиболее простой, уравнение имеет вид

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x)u = f(x), \quad q(x) < 0. \quad (27.1)$$

Будем строить асимптотическое разложение решения в виде формального ряда  $U$  по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \varepsilon^3 u_3(x) + \dots \quad (27.2)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (27.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем очень простую рекуррентную систему для определения коэффициентов  $u_k(x)$ :

$$\begin{cases} q(x)u_0(x) = f(x), \\ u_0''(x) + q(x)u_1(x) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ u_{k-1}''(x) + q(x)u_k(x) = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Так как  $q(x) < 0$ , то из этой системы последовательно определяются все коэффициенты  $u_k(x) \in C^\infty([a; b])$ .

Построенный ряд является *асимптотическим решением уравнения* (27.1). Смысл этого термина тот же, что и в гл. 6. Только там параметром являлась переменная  $t \rightarrow \infty$ , а здесь параметр  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Частичная сумма построенного ряда  $\hat{u}_n(x) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x)$  «почти» удовлетворяет уравнению.

Более точно, легко проверить, что

$$L_\varepsilon \hat{u}_n(x) = f(x) + \varepsilon^{n+1} u_n''(x) = f(x) + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (27.3)$$

Здесь оценка  $O(\varepsilon^{n+1})$  *равномерна* по  $x \in [a; b]$ , т.е. равенство  $\varphi_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^{n+1})$  означает, что

$$\exists M \forall x \in [a; b] \quad |\varphi_\varepsilon(x)| \leq M \varepsilon^{n+1}.$$

Однако *асимптотическим решением задачи* (27.1), (а) (и других краевых задач) построенный ряд не является. Коэффициенты  $u_k(x)$  не имеют никакого отношения к краевым условиям и, разумеется, частичная сумма ряда  $\hat{u}_n(x)$  не может равномерно приближать истинное решение задачи при малых  $\varepsilon$ .



**Определение 27.1.** Ряд (27.2) называется *внешним асимптотическим разложением* решения задачи (27.1), (а) (а также задач (27.1), (б), (27.1), (в)).

Идея построения равномерного асимптотического приближения состоит в следующем. Если надеяться на то, что  $\hat{u}_n(x)$  равномерно приближает истинное решение во внутренних точках отрезка  $[a; b]$ , то сильное расхождение будет только в окрестности границы.

Действительно, как будет доказано ниже, так обстоит дело в этой и во многих других (но не во всех!) задачах. Вблизи концов отрезка истинное решение очень быстро меняется (см. рис. 13, на котором пунктиром показана часть графика истинного решения, не приближаемая графиком функции  $u_0(x)$ ), все производные решения очень большие, и обычный масштаб не позволяет правильно описывать асимптотику. Слагаемое  $\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2}$  в уравнении (27.1) предполагалось малым из-за малости параметра  $\varepsilon$ , оно совсем не учитывалось при построении главного слагаемого асимптотики и оставалось подчиненным при построении остальных членов внешнего асимптотического разложения. Однако вблизи границы вторая производная  $\frac{d^2 u}{dx^2}$  велика и, по-видимому, ее нельзя пренебрегать.

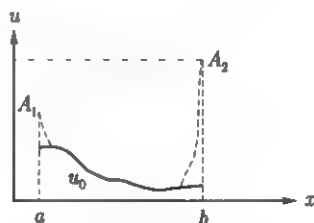


Рис. 13.  $u(x, \varepsilon)$

Вблизи концов правильное описание решения получится, если ввести другие независимые, «растянутые» переменные.

**Определение 27.2.** Окрестность границы называется *пограничным слоем*, новые растянутые переменные называются *внутренними*, а асимптотический ряд в окрестности границы называется *внутренним асимптотическим разложением*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Названия «внешнее» и «внутреннее» разложения происходят из задач гидродинамики. Течение жидкости (или газа) малой вязкости вне твердого тела хорошо описывается уравнениями идеальной жидкости, а в малой окрестности тела, т. е. в пограничном слое, необходимо рассматривать другие независимые переменные и внутренние асимптотические разложения.

Рассмотрим сначала окрестность левого конца отрезка. Новая переменная — это  $\xi = (x - a)\varepsilon^{-\alpha}$ , где показатель  $\alpha > 0$  должен быть подобран. После перехода к новой переменной  $\xi$  производные

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon^{-\alpha} \frac{du}{d\xi}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \varepsilon^{-2\alpha} \frac{d^2u}{d\xi^2},$$

и уравнение приобретает вид

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2u}{d\xi^2} + q(a + \varepsilon^\alpha \xi)u = f(a + \varepsilon^\alpha \xi).$$

Для того чтобы первое слагаемое было таким же полноправным членом уравнения, как и остальные слагаемые (в данном случае в левой части уравнения всего два члена, но для других уравнений их может быть много), необходимо и достаточно положить  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Итак, во внутренней переменной  $\xi$  уравнение имеет вид

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + q(a + \varepsilon^{1/2}\xi)u = f(a + \varepsilon^{1/2}\xi).$$

Можно было бы искать асимптотическое решение непосредственно этого уравнения, но технически в данной простой ситуации более удобно пойти другим путем. Поскольку внешнее асимптотическое разложение  $U$  (см. (27.2)) является асимптотическим решением линейного неоднородного уравнения, то в окрестности точки  $a$  будем искать решение задачи в виде суммы  $U + V$ , где  $V$  — это внутреннее асимптотическое разложение:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\xi) = v_0(\xi) + \varepsilon^{1/2} v_1(\xi) + \varepsilon v_2(\xi) + \varepsilon^{3/2} v_3(\xi) + \dots, \quad (27.4)$$

которое должно формально удовлетворять однородному уравнению

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} + q(a + \varepsilon^{1/2}\xi)V = 0. \quad (27.5)$$

(Дробные показатели, естественно, должны появиться в членах ряда, поскольку они имеются в новом уравнении (27.5).) Коэффициент  $q(a + \varepsilon^{1/2}\xi)$  следует разложить в ряд Тейлора  $\sum_{j=0}^{\infty} q_j \varepsilon^{j/2} \xi^j$ , затем подставить ряд (27.4) в уравнение (27.5) и приравнять члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Для коэффициентов ряда (27.4) получается рекуррентная

система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_0}{d\xi^2} + q_0 v_0 = 0, \\ \frac{d^2 v_1}{d\xi^2} + q_0 v_1 + q_1 \xi v_0 = 0, \\ \frac{d^2 v_2}{d\xi^2} + q_0 v_2 + q_1 \xi v_1 + q_2 \xi^2 v_0 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^2 v_k}{d\xi^2} + q_0 v_k + \sum_{j=1}^k q_j \xi^j v_{k-j} = 0. \end{cases} \quad (27.6)$$

Прежде всего выясним, какова область определения функций  $v_k(\xi)$ . Так как  $x$  меняется от  $a$  до  $b$ , то  $\xi$  меняется от 0 до  $(b-a)\varepsilon^{-1/2}$ . Однако удобнее считать, что  $\xi$  меняется от 0 до  $\infty$ . А главное условие состоит в том, что функции  $v_k(\xi)$  должны очень быстро стремиться к нулю на бесконечности. Это должны быть истинно *функции пограничного слоя*. Для внутренних точек, т.е. там, где  $(x-a)\varepsilon^{-1/2}$  весьма велико, весь ряд  $V$  не должен оказывать влияния — там уже построено внешнее асимптотическое разложение  $U$ . Предназначение ряда  $V$  — устранить так называемую невязку в граничных условиях. Поскольку ряд  $U$  даже формально не удовлетворяет граничным условиям, надо потребовать, чтобы сумма рядов  $U$  и  $V$  удовлетворяла условию на левом конце отрезка (вблизи другого конца потом построим другие функции пограничного слоя).

Сначала рассмотрим граничное условие (а). Так как  $u(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) + V(\xi, \varepsilon)$ , то условие (а) имеет вид:  $U(a, \varepsilon) + V(0, \varepsilon) = A_1$ . Если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , то в силу (27.2) и (27.4) получится система уравнений:

$$\begin{cases} u_0(a) + v_0(0) = A_1, \\ v_1(0) = 0, \\ u_1(a) + v_2(0) = 0, \\ v_3(0) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ v_{2k+1}(0) = 0, \\ u_k(a) + v_{2k}(0) = 0. \end{cases} \quad (27.7)$$

Итак, функция  $v_0(\xi)$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 v_0}{d\xi^2} + q_0 v_0 = 0 \quad (27.8)$$

и граничному условию  $v_0(0) = A_1 - u_0(a)$ .

Поскольку  $q_0 = q(a) < 0$ , обозначим  $q_0 = -\beta^2$ ,  $\beta > 0$ , и выпишем общее решение уравнения (27.8):  $v_0(\xi) = C_1 e^{-\beta\xi} + C_2 e^{\beta\xi}$ . Из сказанного выше следует, что быстрорастущее решение  $e^{\beta\xi}$  не подходит в качестве функции пограничного слоя. Поэтому  $v_0(\xi) = C_1 e^{-\beta\xi}$ . Из граничного условия вытекает, что  $C_1 = A_1 - u_0(a)$  и, следовательно, функция  $v_0(\xi)$  полностью определена:

$$v_0(\xi) = (A_1 - u_0(a))e^{-\beta\xi}.$$

Уравнение для функции  $v_1(\xi)$  имеет вид

$$\frac{d^2}{d\xi^2} v_1 - \beta^2 v_1 + q_1 \xi C_1 e^{-\beta\xi} = 0.$$

Легко убедиться в том, что у него существует единственное ограниченное решение, которое равно нулю при  $\xi = 0$ :

$$v_1(\xi) = P_2(\xi)e^{-\beta\xi}, \quad P_2(\xi) \text{ — полином второй степени, } P_2(0) = 0.$$

Далее по индукции легко показать, что существуют все функции  $v_k(\xi)$ , которые удовлетворяют выписанным выше уравнениям, крайним условиям и имеют вид

$$v_k(\xi) = P_{2k}(\xi)e^{-\beta\xi}.$$

Ряды  $U$  и  $V$  полностью построены. Покажем, что построенный ряд  $V$  (27.4) является асимптотическим решением однородного уравнения (27.5).

Пусть  $\hat{v}_{2n}(\xi) = \sum_{k=0}^{2n} \varepsilon^{k/2} v_k(\xi)$  — частичная сумма ряда (27.4). Тогда

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \hat{v}_{2n} &\equiv \frac{d^2 \hat{v}_{2n}}{d\xi^2} + q(a + \varepsilon^{1/2} \xi) \hat{v}_{2n} = \frac{d^2}{d\xi^2} \sum_{k=0}^{2n} \varepsilon^{k/2} v_k(\xi) + \\ &+ \left[ \sum_{j=0}^{2n} q_j \varepsilon^{j/2} \xi^j + O(\varepsilon^{n+1/2} \xi^{2n+1}) \right] \sum_{k=0}^{2n} \varepsilon^{k/2} v_k(\xi). \end{aligned}$$

Выполнение уравнений для  $v_k$  означает, что коэффициенты при всех степенях  $\varepsilon$  в правой части этого равенства с показателями, которые не больше  $n$ , равны нулю. Из явного вида функций  $v_k(\xi)$  следует, что для любого полинома  $P(\xi)$  функция  $P(\xi)v_k(\xi)$  ограничена при всех  $\xi$  от 0 до  $\infty$ . Следовательно,  $L_\varepsilon \hat{v}_{2n} = O(\varepsilon^{n+1/2})$  равномерно по  $\xi \in [0; \infty)$ , а с учетом (27.3) получаем, что

$$L_\varepsilon (\hat{u}_n(x) + \hat{v}_{2n}(\xi)) = f(x) + O(\varepsilon^{n+1/2}).$$

Построение функций пограничного слоя вблизи другого конца отрезка проводится совершенно аналогично только что проделанному построению у левого конца отрезка. Внутренняя переменная — это  $\eta = \varepsilon^{-1/2}(b - x)$ , ряд в пограничном слое — это  $W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} w_k(\eta)$ .

Функции  $w_k(\eta)$  строятся аналогично функциям  $v_k(\xi)$  и обладают теми же свойствами:

$$w_k(\eta) = Q_{2k}(\eta) e^{-\tilde{\beta}\eta},$$

где  $Q_{2k}(\eta)$  — многочлены степени  $2k$ , а  $\tilde{\beta} = \sqrt{-q(b)}$ .

Если обозначить частичную сумму  $\hat{w}_{2n}(\eta) = \sum_{k=0}^{2n} \varepsilon^{k/2} w_k(\eta)$ , то  $L_\varepsilon \hat{w}_{2n} = O(\varepsilon^{n+1/2})$ , следовательно,

$$L_\varepsilon(\hat{u}_n(x) + \hat{v}_{2n}(\xi) + \hat{w}_{2n}(\eta)) = f(x) + O(\varepsilon^{n+1/2}) \quad (27.9)$$

всюду на отрезке  $[a; b]$  при описанной связи  $\xi$  и  $\eta$  с  $x$ .

Граничные условия также приближенно выполняются. Действительно, по построению  $\hat{u}_n(a) + \hat{v}_{2n}(0) = A_1$ . Все функции  $w_k$ , а потому и  $\hat{w}_{2n}$ , экспоненциально малы при  $x = a$ , т.е. при  $\eta = \varepsilon^{-1/2}(b - a)$ . Поэтому при  $x = a$  выполнено граничное условие с точностью до  $O(\varepsilon^N) \forall N$ . То же самое справедливо и в точке  $x = b$ .

Обозначим

$$Z_{n,\varepsilon}(x) = u(x) - \hat{u}_n(x) - \hat{v}_{2n}(\varepsilon^{-1/2}(x - a)) - \hat{w}_{2n}(\varepsilon^{-1/2}(b - x)),$$

где  $u(x)$  — решение задачи (26.1), (а) (такое решение существует в силу теоремы 26.2). Следовательно,

$$\forall N \quad l_1(Z_{n,\varepsilon}(x)) = O(\varepsilon^N), \quad l_2(Z_{n,\varepsilon}(x)) = O(\varepsilon^N).$$

Из неравенства (27.9) вытекает оценка  $L_\varepsilon(Z_{n,\varepsilon}(x)) = O(\varepsilon^{n+1/2})$ , а из (26.2) следует, что  $Z_{n,\varepsilon}(x) = O(\varepsilon^{n+1/2})$ .

Окончательный вывод следующий: решение  $u_\varepsilon(x)$  задачи (27.1), (а) имеет равномерное асимптотическое разложение на отрезке  $[a; b]$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$u_\varepsilon(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\varepsilon^{-1/2}(x - a)) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} w_k(\varepsilon^{-1/2}(b - x)),$$

$$\varepsilon \rightarrow 0,$$

где  $u_k, v_k, w_k$  — построенные выше функции внешнего и внутренних асимптотических разложений.

Рассмотрим теперь задачу (27.1), (б). Построение внешнего разложения, разумеется, точно такое же, как и проведенное выше.

Ряд (27.2) является внешним асимптотическим разложением и этой задачи. Пограничные слои и внутренние переменные те же, что и выше:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\xi), \quad W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} w_k(\eta),$$

$$\xi = \varepsilon^{-1/2}(x - a), \quad \eta = \varepsilon^{-1/2}(b - x).$$

Системы уравнений для функций  $v_k(\xi)$  и  $w_k(\eta)$  тоже не меняются. Но системы для определения граничных условий меняются. Как и ранее, надо подставить сумму  $U + V$  в условие

$$l_1 u \equiv u(a) - h_1 u'(a) = U(a) + V(a) - h_1 U'(a) - h_1 \varepsilon^{-1/2} V'(a) = A_1$$

и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Тогда вместо системы (27.7) получим другую систему уравнений:

$$\begin{cases} -h_1 v'_0(0) = 0, \\ u_0(a) + v_0(a) - h_1 u'_0(0) - h_1 v'_1(0) = A_1, \\ v_1(a) - h_1 v'_2(0) = 0, \\ u_1(a) + v_2(a) - h_1 u'_1(0) - h_1 v'_3(0) = 0, \\ v_3(a) - h_1 v'_4(0) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ u_k(a) + v_{2k}(a) - h_1 u'_k(0) - h_1 v'_{2k+1}(0) = 0, \\ v_{2k+1}(a) - h_1 v'_{2k+2}(0) = 0. \end{cases} \quad (27.10)$$

Уравнения для функций  $v_k(\xi)$  те же, что и раньше, условие стремления к нулю на бесконечности тоже сохраняется. Поэтому из первого уравнения системы (27.10) следует, что  $v_0(\xi) \equiv 0$ .

Функция  $v_1(\xi)$  определяется из уравнения  $\frac{d^2}{d\xi^2} v_1 - \beta^2 v_1 = 0$  и из второго равенства системы (27.10):

$$v_1(\xi) = (h_1 \beta)^{-1} (A_1 - u_0(a) + h_1 u'_0(a)) e^{-\beta \xi}.$$

Далее последовательно нетрудно определить все  $v_k(\xi)$ , которые экспоненциально быстро стремятся к нулю на бесконечности и удовлетворяют граничным условиям (27.10).

Таким же образом строятся функции  $w_k(\eta)$  пограничного слоя вблизи правого конца отрезка. Там тоже оказывается, что  $w_0(\eta) \equiv 0$ .



так как условий два, а произвольная постоянная, от которой зависит решение дифференциального уравнения первого порядка, всего одна. Функция  $u_0(x)$ , например, может удовлетворить одному из условий, но какому? Или, может быть, надо выбрать функцию  $u_0(x)$  так, что она не будет удовлетворять ни одному из краевых условий, как это было в предыдущем случае  $p(x) \equiv 0$ ,  $q(x) < 0$ ?

Есть несколько подходов, позволяющих найти ответ на этот вопрос. Во-первых, можно рассмотреть уравнение (26.1), для которого есть решение в явном виде (проще всего — уравнение с постоянными коэффициентами). Из явного вида можно понять, каково  $u_0(x)$  и какому условию оно удовлетворяет. По-видимому, и в общем случае можно ожидать такую же картину. Читатель легко может пройти этот путь самостоятельно.

Другой, часто применяемый способ исследования краевой задачи состоит в анализе физической или какой-нибудь другой прикладной интерпретации этой задачи. Затем исходя из общих разумных соображений делается предположение о виде предела решения, после чего проводится строгое математическое обоснование угаданной асимптотики.

Уравнение (26.1) описывает два тесно связанных между собой процесса. Один — это стационарное распределение тепла в движущейся среде, зависящее от одной переменной  $x$ . Малый параметр  $\varepsilon$  — это малая теплопроводность, а коэффициент  $p(x)$  связан со скоростью среды. Другая интерпретация связана со случайным блужданием частицы на отрезке при условии, что  $p(x)$  определяет среднюю скорость движения, а параметр  $\varepsilon$  — малую дисперсию. Не будем далее развивать этот путь, так как он потребует более детального анализа таких физических и вероятностных интерпретаций.

Здесь мы воспользуемся еще одним, тоже полезным и распространенным рецептом. Как было отмечено, главный член асимптотики  $u_0(x)$  не может удовлетворить обоим граничным условиям. Тогда правильное описание асимптотики решения вблизи того конца отрезка, где условие не выполнено, будет осуществляться с помощью функций пограничного слоя (так, как это было сделано в предыдущем примере).

Попробуем сделать это вблизи точки  $a$  в случае граничного условия (а) ( $u(a) = A_1$ ). Внутренняя переменная, как и в предыдущем случае, должна иметь вид:  $\xi = (x - a)\varepsilon^{-\alpha}$ , где показатель  $\alpha > 0$  снова надо подобрать.

Запишем уравнение (26.1) в новой переменной:

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \varepsilon^{-1} p(a + \varepsilon^\alpha \xi) \frac{du}{d\xi} + q(a + \varepsilon^\alpha \xi) u = f(a + \varepsilon^\alpha \xi).$$



Однородное уравнение для внутреннего разложения  $V$ , которое должно компенсировать невязку в граничном условии, имеет вид

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2 V}{d\xi^2} + \varepsilon^{-1} p(a + \varepsilon^\alpha \xi) \frac{dV}{d\xi} + q(a + \varepsilon^\alpha \xi) V = 0.$$

Теперь в уравнении два члена, старших по порядку  $\varepsilon$ :  $\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2 V}{d\xi^2}$  и  $\varepsilon^{-1} p(a + \varepsilon^\alpha \xi) \frac{dV}{d\xi}$ .

Если  $\alpha > 1$ , то главным является первое слагаемое, и уравнение для главного члена внутреннего разложения  $v_0(\xi)$ :  $v_0''(\xi) = 0$ .

Если  $\alpha < 1$ , то главным является второе слагаемое, и уравнение для главного члена внутреннего разложения  $v_0(\xi)$ :  $v_0'(\xi) = 0$ .

Ни одно из этих уравнений не имеет решения типа функции пограничного слоя (т. е. нетривиальной функции, быстро стремящейся к нулю на бесконечности). Следовательно, единственная возможность построить подходящее внутреннее разложение — приравнять порядки главных слагаемых уравнения, т. е. положить  $1 - 2\alpha = -1$ ,  $\alpha = 1$ . Тогда уравнение для  $v_0(\xi)$  примет вид:  $\frac{d^2 v_0}{d\xi^2} + p(a) \frac{dv_0}{d\xi} = 0$ . Так как  $p(x) < 0$ , то и это уравнение не имеет подходящего решения. Отсюда следует, что невозможно построить асимптотику решения вблизи точки  $x = a$  с помощью добавления функций пограничного слоя, так как это было сделано в предыдущем примере.

Поэтому, раз нельзя ждать помощи от функций пограничного слоя, вся забота об удовлетворении граничного условия в точке  $x = a$  должна ложиться на внешнее разложение. Таким образом, заканчивается неопределенность в отношении функций  $u_k(x)$ : решения системы (27.12) надо выбирать так, чтобы было выполнено условие  $l_1 U = A_1$ . Такие функции легко построить, после чего ряд  $U$  будет асимптотическим решением уравнения (26.1) и тоже асимптотически будет удовлетворять граничному условию в точке  $x = a$ .

Однако теперь построенное внешнее разложение не удовлетворяет граничному условию в точке  $x = b$ . Исправление получившейся невязки следует возложить на функции пограничного слоя вблизи точки  $x = b$ . Внутренняя переменная — это  $\eta = (b - x)\varepsilon^{-\alpha}$ . Те же соображения, которые возникли при обсуждении внутреннего асимптотического разложения вблизи точки  $x = a$ , приводят к равенству  $\alpha = 1$ . Следовательно,  $\eta = (b - x)\varepsilon^{-1}$ , формальный ряд внутреннего асимптотического разложения вблизи точки  $x = b$  имеет вид

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(\eta), \quad (27.13)$$

а формальное уравнение для этого ряда вполне аналогично рассмотренному выше уравнению (27.5) и имеет вид

$$\varepsilon^{-1} \frac{d^2 W}{d\eta^2} - \varepsilon^{-1} p(b - \varepsilon\eta) \frac{dW}{d\eta} + q(b - \varepsilon\eta) W = 0. \quad (27.14)$$

Поэтому уравнение  $\frac{d^2 w_0}{d\eta^2} - p(b) \frac{dw_0}{d\eta} = 0$  для главного члена асимптотики  $w_0(\eta)$  очень похоже на выписанное выше уравнение для  $v_0(\xi)$ . Отличие лишь в коэффициенте при первой производной: вместо  $p(a)$  теперь стоит  $-p(b)$ . Но так как  $p(x) < 0$ , то это отличие очень существенно. Если уравнение для  $v_0(\xi)$  не имело решения вида функции пограничного слоя, то у уравнения для  $w_0(\eta)$  такое решение существует. Если обозначить  $p(b) = -\beta^2$ ,  $\beta > 0$ , то  $w_0(\eta) = C e^{-\beta\eta}$ .

Дальнейшее построение функций  $w_k(\eta)$  уже не представляет серьезных трудностей. Коэффициенты  $p(b - \varepsilon\eta)$  и  $q(b - \varepsilon\eta)$  разложим в ряды Тейлора:

$$p(b - \varepsilon\eta) = -\beta^2 + \sum_{j=1}^{\infty} r_j \varepsilon^j \eta^j, \quad q(b - \varepsilon\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j \varepsilon^j \eta^j.$$

Затем подставим ряд (27.13) в уравнение (27.14) и приравняем члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Для коэффициентов ряда (27.13) получается рекуррентная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 w_0}{d\eta^2} + \beta^2 \frac{dw_0}{d\eta} = 0, \\ \frac{d^2 w_1}{d\eta^2} + \beta^2 \frac{dw_1}{d\eta} - r_1 \eta \frac{dw_0}{d\eta} + q_0 w_0 = 0, \\ \frac{d^2 w_2}{d\eta^2} + \beta^2 \frac{dw_2}{d\eta} - r_1 \eta \frac{dw_1}{d\eta} - r_2 \eta^2 \frac{dw_0}{d\eta} + q_0 w_1 + \eta q_1 w_0 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^2 w_k}{d\eta^2} + \beta^2 \frac{dw_k}{d\eta} - \sum_{j=1}^k r_j \eta^j \frac{dw_{k-j}}{d\eta} + \sum_{j=0}^{k-1} q_j \eta^j w_{k-1-j} = 0. \end{cases} \quad (27.15)$$

Так же как и в первом случае, условие в точке  $x = b$  порождает рекуррентную систему для определения граничных значений функций  $w_k(\eta)$  в нуле:

$$\begin{cases} u_0(b) + w_0(0) = A_2, \\ u_1(b) + w_1(0) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ u_k(b) + w_k(0) = 0. \end{cases} \quad (27.16)$$

Отсюда однозначно определяются все функции  $w_k(\eta)$ , очень быстро стремящиеся к нулю при  $\eta \rightarrow \infty$ :

$$w_0(\eta) = (A_2 - u_0(b))e^{-\beta\eta}, \quad w_k(\eta) = P_{2k}(\eta)e^{-\beta\eta},$$

где  $P_{2k}$  — полиномы степени  $2k$ .

Формальные асимптотические ряды построены. Примерное поведение решения показано на рис. 14, где, как и на рис. 13, пунктиром показана часть графика истинного решения, не приближаемая графиком функции  $u_0(x)$ .

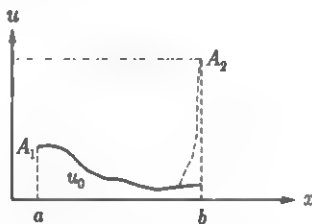


Рис. 14.  $u(x, \varepsilon)$

Обоснование асимптотики вполне аналогично проведенному выше. Если обозначить частичные суммы

$$\hat{u}_n(x) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x), \quad \hat{w}_n(\eta) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k w_k(\eta),$$

то

$$L_\varepsilon(\hat{u}_n(x) + \hat{w}_n(\eta)) = f(x) + O(\varepsilon^{n+1})$$

при выписанной связи между  $\eta$  и  $x$  равномерно по  $x$  на отрезке  $[a; b]$ .

Граничные условия также приближенно выполняются. Действительно, по построению  $\hat{u}_n(b) + \hat{w}_n(0) = A_2$ . Все функции  $w_k$ , а потому и  $\hat{w}_{2n}$ , экспоненциально малы при  $x = a$ , т. е. при  $\eta = \varepsilon^{-1}(b - a)$ .

Обозначим

$$Z_{n,\varepsilon}(x) = u(x) - \hat{u}_n(x) - \hat{w}_n(\varepsilon^{-1}(b - x)),$$

где  $u(x)$  — решение задачи (26.1), (а) (такое решение существует в силу теоремы 26.4).

Следовательно,

$$\forall n \quad l_1(Z_{n,\varepsilon}(x)) = O(\varepsilon^n), \quad l_2(Z_{n,\varepsilon}(x)) = 0, \quad L_\varepsilon(Z_{n,\varepsilon}(x)) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Из теоремы 26.4 вытекает оценка  $Z_{n,\varepsilon}(x) = O(\varepsilon^{n+1})$ . Окончательный вывод следующий: решение  $u_\varepsilon(x)$  задачи (27.11), (а) при  $p(x) < 0$

имеет равномерное асимптотическое разложение на отрезке  $[a; b]$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$u_\varepsilon(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(\varepsilon^{-1}(b-x)),$$

где  $u_k, w_k$  — построенные выше функции внешнего и внутреннего асимптотических разложений.

В случае  $p(x) < 0$  асимптотическое разложение решения имеет точно такую же структуру, только пограничный слой находится не около правого, а около левого конца отрезка.<sup>1)</sup>

## § 28. Простейшая бисингулярная задача

Рассмотрим краевую задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^3 u'' - q(x)u = f(x), \quad \varepsilon > 0, \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad (28.1)$$

$$u(0, \varepsilon) = 0, \quad (28.2)$$

$$u(1, \varepsilon) = 0, \quad (28.3)$$

где  $q, f \in C^\infty[0; 1]$  и  $q(x) > 0$  при  $x > 0$ . Как видим, отличия от примеров из предыдущего параграфа небольшие: замена  $\varepsilon$  на  $\varepsilon^3$  не играет никакой роли и сделана лишь для удобства дальнейших записей, замена неоднородных граничных условий однородными тоже несущественна. Но главное изменение в том, что  $q(x)$  теперь положительна не на всем отрезке  $[0; 1]$ , а лишь при  $x > 0$ . Предположим, что

$$q(0) = 0, \quad q'(0) = 1. \quad (28.4)$$

Условие положительности  $q'(0)$  сильно сказывается на структуре асимптотики решения, но какому именно положительному числу равно  $q'(0)$ , несущественно: единица выбрана для упрощения записи.

Итак, ищем внешнее разложение, как и в предыдущем параграфе, в виде

$$U(x, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k} u_{3k}(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (28.5)$$

<sup>1)</sup> Формальная асимптотика решений других краевых задач (б) и (в) для уравнения (27.11) также легко строится тем же путем, если уравнения для коэффициентов внешнего разложения имеют решения, удовлетворяющие соответствующим краевым условиям. В редких случаях это невозможно, а как отмечено выше, иногда не существует и решения первоначальной задачи. Обоснование асимптотики требует более глубокого исследования, а в некоторых случаях сама асимптотика имеет более сложный характер, чем в тех, которые рассмотрены в данном параграфе.

Так же как и ранее, получается рекуррентная система уравнений:

$$\begin{cases} -q(x)u_0(x) = f(x), \\ q(x)u_{3k}(x) = u_{3(k-1)}''(x), \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (28.6)$$

Отсюда однозначно определяются все  $u_{3k} \in C^\infty(0, 1]$ . Однако в нуле все эти функции, вообще говоря, имеют особенности.

Введем обозначения  $q_k$  и  $f_k$  для коэффициентов рядов Тейлора функций  $q(x)$  и  $f(x)$ : в силу (28.4)

$$q(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} q_k x^k, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \quad x \rightarrow 0, \quad (28.7)$$

и эти ряды можно почленно дифференцировать любое число раз. Из равенств (28.6), (28.7) вытекает, что

$$u_0(x) \stackrel{\text{as}}{=} -x^{-1} \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} q_k x^{k-1} \right)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k = x^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{0,j} x^j, \quad x \rightarrow 0.$$

Этот ряд тоже можно почленно дифференцировать. Следовательно, из (28.6) для  $k = 1$  получаем

$$u_3(x) \stackrel{\text{as}}{=} x^{-4} \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j} x^j, \quad x \rightarrow 0.$$

По индукции приходим к выводу, что

$$u_{3k}(x) \stackrel{\text{as}}{=} x^{-3k-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} x^j, \quad x \rightarrow 0. \quad (28.8)$$

Таким образом, задача (28.1)–(28.3) является *бисингулярной* — коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности в нуле.

Множество  $\Gamma$  в окрестности которого внешнее разложение является непригодным, — это в данной задаче точки  $x = 0$  и  $x = 1$ . В окрестности точки  $x = 1$  поведение решения точно такое же, как в предыдущем параграфе. Экспоненциальные погранслойные функции в окрестности этой точки мы учтем позднее, а пока обратимся к точке  $x = 0$ . В ее окрестности ряд (28.5) не только не приближает решения  $u(x, \varepsilon)$ , но даже теряет асимптотический характер. Действительно, например, при  $x \sim \varepsilon^2$  функции  $u_{3k}(x)$ , согласно (28.8), имеют порядок  $\varepsilon^{-6k-2}$  и, следовательно, отношение последующего члена ряда (28.5) к предыдущему имеет порядок  $\varepsilon^{-3}$ .

Чтобы правильно описать асимптотику решения  $u(x, \varepsilon)$  в окрестности нуля, сделаем растяжение координаты  $x = \varepsilon^\alpha \xi$  и обозначим

$v(\xi, \varepsilon) \equiv u(\varepsilon^\alpha \xi, \varepsilon)$ . Уравнение (28.1) после замены переменной имеет вид

$$\varepsilon^{3-2\alpha} \frac{d^2 v}{d\xi^2} - q(\varepsilon^\alpha \xi) v = f(\varepsilon^\alpha \xi).$$

В соответствии с соображениями, которые обсуждались в предыдущей главе, надо добиться, чтобы оба члена в левой части выписанного уравнения при фиксированном  $\xi > 0$  имели одинаковый порядок. Так как в силу (28.7)  $q(\varepsilon^\alpha \xi) \sim \varepsilon^\alpha \xi$ , то, следовательно,  $3 - 2\alpha = \alpha \implies \alpha = 1$ .

Итак, вблизи начала координат уравнение приобретает форму

$$\varepsilon \frac{d^2 v}{d\xi^2} - q(\varepsilon \xi) v = f(\varepsilon \xi), \quad (28.9)$$

а асимптотику решения  $v(\xi, \varepsilon) \equiv u(\varepsilon \xi, \varepsilon)$  ищем в виде внутреннего разложения

$$V(\xi, \varepsilon) \equiv \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (28.10)$$

где  $\xi = \varepsilon^{-1}x$ . Этот ряд начинается с члена  $\varepsilon^{-1}v_{-1}(\xi)$ , так как главный член внешнего разложения  $u_0(x) \sim \varepsilon^{-1}\xi^{-1}$ , но, конечно, это лишь эвристические соображения. Полное оправдание такая запись получит только в конце, после строгого обоснования асимптотики.

Далее надо подставить ряд (28.10) в уравнение (28.9), разложить функции  $q(\varepsilon \xi)$  и  $f(\varepsilon \xi)$  в ряды Тейлора и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Получается система уравнений:

$$\begin{cases} v''_{-1} - \xi v_{-1} = f_0, \\ v''_k - \xi v_k = f_{k+1} \xi^{k+1} + \sum_{j=2}^{k+2} q_j \xi^j v_{k-j+1}, \quad k \geq 0. \end{cases} \quad (28.11)$$

Равенство (28.2) порождает граничные условия

$$v_k(0) = 0, \quad k \geq -1. \quad (28.12)$$

**Теорема 28.1.** Система (28.11) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (28.12) в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени  $\xi$ ; каждая из функций  $v_k(\xi)$  имеет на бесконечности следующую асимптотику:

$$v_k(\xi) \stackrel{\text{as}}{=} \xi^k \sum_{j=0}^{\infty} h_{k,j} \xi^{-3j}, \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad k \geq -1. \quad (28.13)$$

Высказанные утверждения относительно  $v_k(\xi)$  вполне естественны, так как коэффициенты рядов (28.13) легко вычисляются после формальной подстановки рядов в уравнения (28.11). Так, например,

$$h_{-1,0} = -f_0, \quad h_{-1,1} = 2h_{-1,0}, \quad h_{-1,2} = 20h_{-1,1}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad h_{0,0} = -f_1 + q_2 f_0, \quad h_{0,1} = -2q_2 h_{-1,0} \text{ и т. д.}$$

Что касается решений однородного уравнения, то одно из них экспоненциально растет и поэтому не может быть использовано для решения задач (28.11), (28.12), а второе экспоненциально быстро стремится к нулю, и с его помощью можно удовлетворить краевым условиям (28.12).

Для доказательства теоремы 28.1 нам понадобятся два утверждения.

**Лемма 28.1.** Если  $\varphi(\xi) \in C[0; +\infty)$  и  $\varphi(\xi) = O(\xi^{-N})$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ , то у уравнения

$$lv \equiv v'' - \xi v = \varphi(\xi)$$

существует решение  $\bar{v}(\xi) \in C^2[0; +\infty)$ , удовлетворяющее соотношению

$$\bar{v}(\xi) = O(\xi^{-N}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (28.14)$$

**Доказательство.** Уравнение Эйри  $v(\xi)'' - \xi v(\xi) = 0$  имеет (см. § 24) два линейно независимых решения:

$$Y_1(\xi) \stackrel{\text{as}}{\approx} \xi^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^{-3k/2}\right\}, \quad \xi \rightarrow \infty,$$

$$Y_2(\xi) \stackrel{\text{as}}{\approx} \xi^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi^{-3k/2}\right\}, \quad \xi \rightarrow \infty,$$

$$Y_2(\xi) > 0 \quad \text{при } \xi \geq 0.$$

Если  $\varphi(\xi) \in C[0; +\infty)$  и  $|\varphi(\xi)| \leq M|\xi|^{-N}$ , то требуемое решение дается следующей формулой:

$$\bar{v}(\xi) \equiv -\frac{1}{2} \left( Y_2(\xi) \int_0^{\xi} Y_1(s) \varphi(s) ds + Y_1(\xi) \int_{\xi}^{+\infty} Y_2(s) \varphi(s) ds \right). \quad \nabla \quad (28.15)$$

**Лемма 28.2.** Пусть функция  $g(\xi) \in C^\infty[0; +\infty)$  и разлагается в асимптотический ряд

$$g(\xi) \stackrel{\text{as}}{\approx} \xi^p \sum_{j=0}^{\infty} g_j \xi^{-3j}, \quad \xi \rightarrow +\infty.$$

Тогда при  $0 \leq \xi \leq +\infty$  существует решение уравнения

$$v'' - \xi v = g(\xi), \quad (28.16)$$

которое разлагается в асимптотический ряд

$$v(\xi) \stackrel{\text{ас}}{=} \xi^{p-1} \sum_{j=0}^{\infty} v_j \xi^{-3j}, \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (28.17)$$

При этом ряд (28.17) можно многократно почленно дифференцировать и он является формальным асимптотическим решением (ф. а. р.) уравнения (28.16).

(Под ф. а. р. мы понимаем здесь то же, что и выше: это означает, что частичная сумма ряда (28.17) с достаточно большим номером  $N$  после подстановки в левую часть уравнения (28.16) отличается от правой части на  $O(\xi^{-N_1})$ , где  $N_1 \rightarrow +\infty$  при  $N \rightarrow +\infty$ .)

**Доказательство.** Прежде всего построим формально ряд  $V(\xi) \equiv \xi^{p-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \xi^{-3j}$ . Для этого подставим его в уравнение (28.16),

функцию  $g(\xi)$  заменим ее асимптотическим рядом и получим простую рекуррентную алгебраическую систему для  $c_j$ , откуда они однозначно определяются:  $c_0 = -g_0$ ,  $c_1 = -g_1 + (p-1)(p-2)c_0$  и т. д.

Затем возьмем частичную сумму  $B_N V$  ряда  $V(\xi)$ , где  $N$  достаточно велико, и умножим ее на функцию  $\chi(\xi) \in C^\infty[0; +\infty)$ , которая равна нулю при  $\xi \leq 1$  и равна единице при  $\xi \geq 2$ . Обозначим  $y_N(\xi) \equiv \chi(\xi) B_N V$ .

По построению функция  $F_N(\xi) \equiv g - l y_N = O(\xi^{-N})$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Используя формулу (28.15), построим функцию  $z_N(\xi)$  — решение уравнения  $l z_N = F_N(\xi)$ . Из соотношения (28.14) вытекает, что  $z_N(\xi)$  быстро стремится к нулю при  $\xi \rightarrow +\infty$ .

Положим  $v_N(\xi) \equiv y_N(\xi) + z_N(\xi) + d_N Y_2(\xi)$ , где постоянная  $d_N$  выбрана так, чтобы  $v_N(0) = 0$ . По построению

$$l v_N = g(\xi), \quad v_N - B_N V = O(\xi^{-N}),$$

и осталось лишь доказать, что функция  $v_N$  не зависит от  $N$ .

Действительно, разность  $w_N(\xi) \equiv v_N(\xi) - v_{N+1}(\xi)$  — это решение уравнения  $l w_N = 0$ ,  $w_N(0) = 0$ , функция  $w_N(\xi)$  растет при  $\xi \rightarrow +\infty$  не быстрее степени  $\xi$  и из явного вида общего решения однородного уравнения  $v'' - \xi v = 0$  вытекает, что  $w_N \equiv 0$ . Утверждение относительно возможности дифференцирования ряда (28.17) вытекает непосредственно из уравнения (28.16). ▼

**Доказательство теоремы 28.1.** Применяя лемму 28.2 последовательно к уравнениям (28.11), получим утверждения дока-



зываемой теоремы о существовании решений и их асимптотики при  $\xi \rightarrow +\infty$ . ▼

Итак, оба разложения — внешнее (28.5) и внутреннее (28.10) — построены. Осталось выяснить, являются ли они правильными асимптотиками решения  $u(x, \varepsilon)$  задачи (28.1)–(28.3) и, если являются, то в каких областях.

Так как при  $x \rightarrow 0$  функции  $u_k(x) \sim x^{-3k-1}$ , то ряд (28.5) имеет асимптотический характер (т.е. следующий член ряда по порядку меньше предыдущего) при  $x > \varepsilon^\alpha$  для любого  $\alpha$ , такого что  $0 < \alpha < 1$ . Аналогично, так как  $v_k(\xi) \sim \xi^k$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , то ряд (28.10) имеет асимптотический характер при  $\varepsilon\xi < \varepsilon^\beta$ , т.е. при  $x < \varepsilon^\beta$  для любого положительного  $\beta$ . Заметим, что области  $x > \varepsilon^\alpha$  и  $x < \varepsilon^\beta$  при  $\alpha > \beta$  перекрываются.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения.

**О п р е д е л е н и е 28.1.** Запись  $A_{n,x}U$  ( $A_{n,\xi}V$ ) означает частичную сумму ряда  $U$  ( $V$ ) с членами порядка не меньше  $O(\varepsilon^n)$ .

Покажем, что в областях  $x > \varepsilon^\alpha$  и  $x < \varepsilon^\beta$  ряды  $U(x, \varepsilon)$  и  $V(\xi, \varepsilon)$  соответственно являются ф. а. р. уравнения (28.1).

Действительно,

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(A_{3n,x}U(x, \varepsilon)) &= f(x) + \varepsilon^{3n+3}u''_{3n}(x) = f(x) + O(\varepsilon^{3n+3}x^{-3n-3}) = \\ &= f(x) + O(\varepsilon^{(3n+3)(1-\alpha)}) \quad \text{при } x > \varepsilon^\alpha, \quad (28.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(A_{n,\xi}V(\xi, \varepsilon)) &= \varepsilon \frac{d^2 A_{n,\xi}V}{d\xi^2} - q(\varepsilon\xi)A_{n,\xi}V = \\ &= \varepsilon \frac{d^2 A_{n,\xi}V}{d\xi^2} - \{A_{n+2,\xi}q(\varepsilon\xi)\}[A_{n,\xi}V] + O(\varepsilon^{n+3}\xi^{n+3}(\varepsilon^{-1} + \varepsilon^n\xi^n)) = \\ &= A_{n,\xi}f(\varepsilon\xi) - \sum_{\substack{i \leq n, j \leq n+2 \\ i+j \geq n+1}} q_j \varepsilon^j v_i(\xi) \varepsilon^i + O(\varepsilon^{n+2}\xi^{n+3} + \varepsilon^{2n+3}\xi^{2n+3}) = \\ &= f(x) + O(\varepsilon^{(n+1)\beta-1}), \quad \text{если } x < \varepsilon^\beta. \quad (28.19) \end{aligned}$$

При выводе последних равенств были использованы уравнения (28.11) и оценки функции  $v_i(\xi)$ , вытекающие из (28.13).

Ряд  $V(\xi, \varepsilon)$  из (28.10) удовлетворяет условию (28.2), а ряд  $U(x, \varepsilon)$  из (28.5), вообще говоря, не удовлетворяет условию (28.3). Для устранения невязки в граничном условии (28.3) надо к ряду  $U(x, \varepsilon)$  добавить ряд  $W(\eta, \varepsilon)$ , в точности такой же, как в § 27 на с. 124 (с заменой  $\varepsilon^{1/2}$  на  $\varepsilon^{3/2}$ ).

Итак, на всем отрезке  $[0; 1]$  построено ф. а. р. задачи (28.1)–(28.3). Поэтому совершенно естественно ожидать, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 28.2.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — какие-либо числа, такие что  $0 < \beta < \alpha < 1$ . Тогда построенный выше ряд (28.10) является равномерным асимптотическим разложением функции  $u(x, \varepsilon)$  — решения задачи (28.1)–(28.3) на отрезке  $[0; \varepsilon^\beta]$ , а сумма рядов (28.5) и ряда  $W(\eta, \varepsilon)$  является равномерным асимптотическим разложением того же решения на отрезке  $[\varepsilon^\alpha; 1]$ .

Для доказательства этой теоремы понадобится прежде всего установить равномерную оценку оператора, обратного к дифференциальному оператору (28.1) с условиями (28.2), (28.3).

**Лемма 28.3.** Пусть функция  $w(x) \in C^2[0; 1]$  и удовлетворяет уравнению

$$L_\varepsilon w \equiv \varepsilon^3 w'' - q(x)w = \varphi(x),$$

где  $q(x) \in C[0; 1]$ ,  $q(x) > 0$  при  $x > 0$ . Тогда справедлива оценка

$$|w(x)| \leq M(|w(0)| + |w(1)| + \varepsilon^{-3} \max_{x \in [0; 1]} |\varphi(x)|). \quad (28.20)$$

**Доказательство.** После замены  $w \equiv (2 - x^2)z$  для функции  $z(x)$  получается уравнение

$$\varepsilon^3 z'' - 2\varepsilon^3 x(2 - x^2)^{-1} z' - [q(x) + 2\varepsilon^3(2 - x^2)^{-1}]z = (2 - x^2)^{-1}\varphi(x).$$

Из принципа максимума следует, что

$$|z(x)| \leq |z(0)| + |z(1)| + \varepsilon^{-3} \max_{x \in [0; 1]} |\varphi(x)|,$$

откуда вытекает оценка (28.20). ▼

Из леммы 28.3, в частности, следует, что для решения задачи (28.1)–(28.3) справедлива оценка  $|u(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^{-3}$ . Но это грубая оценка. Хотя функции  $u(x, \varepsilon)$  не являются равномерно ограниченными при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , но из асимптотического разложения (28.10) вытекает, что

$$|u(x, \varepsilon)| \leq \varepsilon^{-1} \max_{\xi} |v_{-1}(\xi)| + M.$$

После того как теорема 28.2 будет доказана, станет ясно, что справедлива именно эта оценка и она является точной.

Далее покажем, что внешнее разложение (28.5) и внутреннее разложение (28.10) согласованы между собой следующим образом:

$$\forall m > 0, n > 0 \quad A_{m, \xi} A_{n, x} U(x, \varepsilon) = A_{n, x} A_{m, \xi} V(\xi, \varepsilon). \quad (28.21)$$

Соотношение (28.21) является центральным в методе согласования, примененном к любой бисингулярной задаче.

Здесь, как и во всех задачах, рассматриваемых ниже, левая и правая части равенства (28.21) — это линейная комбинация элементарных функций от  $x$  или от  $\xi$  с коэффициентами, зависящими от  $\varepsilon$ . В данном примере функции — это степени  $x$  или  $\xi$ , а коэффициенты — степени  $\varepsilon$ . После того как левая и правая части записаны в одних и тех же переменных ( $x$  или  $\xi$ ), проверка равенства (28.21) сводится к проверке равенства соответствующих коэффициентов.

Например, в рассматриваемом здесь примере левая часть соотношения (28.21) в силу (28.5), (28.8) равна  $\varepsilon^{-1} \sum_{3k \leq n} \xi^{-3k-1} \sum_{j \leq m+1} c_{k,j} \varepsilon^j \xi^j$ , а правая часть в силу (28.10), (28.13) равна  $\sum_{k=-1}^m x^k \sum_{3j \leq n} h_{k,j} x^{-3j} \varepsilon^{3j}$ .

Отсюда видно, что равенство (28.21) эквивалентно серии равенств  $h_{k,j} = c_{j,k+1}$  для  $k \geq -1$ ,  $j \geq 0$ .

Нетрудно убедиться в справедливости этих равенств исходя из рекуррентных систем уравнений (28.6) и (28.11), но предпочтем несколько видоизмененное доказательство соотношения (28.21), которое пригодно и в более сложных случаях.

Доказательство фактически основано на том, что ряды  $U(x, \varepsilon)$  и  $V(\xi, \varepsilon)$  являются ф. а. р. одного и того же уравнения в разных, но перекрывающихся областях. Для простоты положим  $n = 3N$ . Из асимптотики (28.8) видно, что

$$A_{m,\xi} A_{3N,x} U(x, \varepsilon) = \sum_{l=-1}^m \varepsilon^l \xi^l B_{3N} V_l(\xi), \quad (28.22)$$

где  $V_l(\xi)$  — это ряды

$$V_l(\xi) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,l+1} \xi^{-3j}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (28.23)$$

а значение оператора  $B_p$ , как всегда, означает частичную сумму ряда, содержащую члены  $\xi^{-s}$  при  $s \leq p$ .

Подставляя  $A_{3N,x} U(x, \varepsilon)$  в левую часть уравнения (28.1), получим равенство

$$L_\varepsilon(A_{3N,x} U(x, \varepsilon)) = f(x) + \varepsilon^{3N+3} u_{3N}''(x). \quad (28.24)$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор  $A_{m+1,\xi}$ :

$$\begin{aligned} A_{m+1,\xi} \left( \varepsilon \frac{d^2}{d\xi^2} A_{3N,x} U - q(\varepsilon \xi) A_{3N,x} U \right) = \\ = A_{m+1,\xi} f(\varepsilon \xi) + A_{m+1,\xi} \left( \varepsilon^{3N+1} \frac{d^2}{d\xi^2} u(\varepsilon \xi, \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Перепишем это равенство, учитывая асимптотическое разложение (28.8) и соотношение (28.22):

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{l=-1}^m \varepsilon^l \frac{d^2}{d\xi^2} (\xi^l B_{3N} V_l) - A_{m+1, \xi} \left\{ \left( \sum_{l=-1}^{\infty} \varepsilon^l \xi^l B_{3N} V_l \right) \left( \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \xi^j q_j \right) \right\} = \\ = A_{m+1, \xi} f(\varepsilon \xi) + A_{m+1, \xi} \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \xi^{-3N-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{3N, j} \varepsilon^j \xi^j \right). \end{aligned}$$

В этом соотношении уже нет бесконечных рядов: левая и правая части — это конечные суммы членов, каждый из которых — это произведение степени  $\xi$  на степень  $\varepsilon$ . Поэтому теперь уже не формально, как ранее, а на законном основании можно приравнять слева и справа все члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Легко заметить, что эта процедура, по существу, мало отличается от той, с помощью которой были выписаны уравнения (28.11).

Действительно, уравнение (28.24) отличается от уравнения (28.9) только слагаемым  $\varepsilon^{3N+3} u_{3N}''(x)$ , и соответствующими слагаемыми будут отличаться получающиеся уравнения для  $\xi^l B_{3N} V_l$ :

$$\frac{d^2}{d\xi^2} (\xi^{-1} B_{3N} V_{-1}) - \xi (\xi^{-1} B_{3N} V_{-1}) = f_0 + O(\xi^{-3N-3}),$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} (B_{3N} V_0) - \xi (B_{3N} V_0) = f_1 \xi + q_2 \xi^2 (\xi^{-1} B_{3N} V_{-1}) + O(\xi^{-3N-2})$$

и т. д. Отсюда вытекает, что функции  $\xi^k V_k$ , где  $V_k$  — ряды (28.23), — это ф. а. р. уравнений (28.11) теперь уже при  $\xi \rightarrow +\infty$ . А так как в каждом из уравнений (28.11) коэффициенты асимптотики при  $\xi \rightarrow +\infty$  находятся однозначно, то тем самым

$$v_k(\xi) \stackrel{\text{as}}{=} \xi^k V_k(\xi), \quad \xi \rightarrow +\infty,$$

и выполнены равенства (28.21).

Приведем еще один наглядный и полезный вид записи основного равенства (28.21), который будет применяться и ниже. Выпишем составляющие левой и правой частей равенства (28.21) в виде таблицы (см. табл. 3).

В каждой строке таблицы стоит асимптотическое разложение при  $x \rightarrow 0$  внешнего разложения (28.5)  $\varepsilon^{3k} u_{3k}(x)$ : в нижней части каждой клетки этой строки помещено, в соответствии с (28.8),  $\varepsilon^{3k} c_{k, j} x^{j+3k-1}$ .

В каждом столбце таблицы стоит асимптотическое разложение при  $\xi \rightarrow \infty$  члена внутреннего разложения (28.10)  $\varepsilon^i v_i(\xi)$ : в верхней части каждой клетки этого столбца, в соответствии с (28.13), помещено  $\varepsilon^i h_{i, l} \xi^{i-3l}$ .

Таблица 3

$U \backslash V$	$\varepsilon^{-1}v_{-1}(\xi)$	$v_0(\xi)$	$\varepsilon^1v_1(\xi)$	$\varepsilon^2v_2(\xi)$	$\varepsilon^3v_3(\xi)$	...
$u_0(x)$	$\varepsilon^{-1}h_{-1,0}\xi^{-1}$ — $c_{0,0}x^{-1}$	$h_{0,0}$ — $c_{0,1}$	$\varepsilon^1h_{1,0}\xi^1$ — $c_{0,2}x$	$\varepsilon^2h_{2,0}\xi^{21}$ — $c_{0,3}x^{21}$	$\varepsilon^3h_{3,0}\xi^3$ — $c_{0,4}x^3$	...
$\varepsilon^3u_3(x)$	$\varepsilon^{-1}h_{-1,1}\xi^{-4}$ — $\varepsilon^3c_{1,0}x^{-4}$	$h_{0,1}\xi^{-3}$ — $\varepsilon^3c_{1,1}x^{-3}$	$\varepsilon^1h_{1,1}\xi^{-2}$ — $\varepsilon^3c_{1,2}x^{-2}$	$\varepsilon^2h_{2,1}\xi^{-1}$ — $\varepsilon^3c_{1,3}x^{-1}$	$\varepsilon^3h_{3,1}$ — $\varepsilon^3c_{1,4}$	...
$\varepsilon^6u_6(x)$	$\varepsilon^{-1}h_{-1,2}\xi^{-7}$ — $\varepsilon^6c_{2,0}x^{-7}$	$h_{0,2}\xi^{-6}$ — $\varepsilon^6c_{2,1}x^{-6}$	$\varepsilon^1h_{1,2}\xi^{-5}$ — $\varepsilon^6c_{2,2}x^{-5}$	$\varepsilon^2h_{2,2}\xi^{-4}$ — $\varepsilon^6c_{2,3}x^{-4}$	$\varepsilon^3h_{3,2}\xi^{-3}$ — $\varepsilon^6c_{2,4}x^{-3}$	...
$\varepsilon^9u_9(x)$	$\varepsilon^{-1}h_{-1,3}\xi^{-10}$ — $\varepsilon^9c_{3,0}x^{-10}$	$h_{0,3}\xi^{-9}$ — $\varepsilon^9c_{3,1}x^{-9}$	$\varepsilon^1h_{1,3}\xi^{-8}$ — $\varepsilon^9c_{3,2}x^{-8}$	$\varepsilon^2h_{2,3}\xi^{-7}$ — $\varepsilon^9c_{3,3}x^{-7}$	$\varepsilon^3h_{3,3}\xi^{-6}$ — $\varepsilon^9c_{3,4}x^{-6}$	...
...	...	...	...	...	...	...

Согласованность асимптотических разложений состоит как раз в том, что в верхней и нижней частях каждой клетки стоит одна и та же функция! Отсюда и вытекает равенство (28.21), а в нашем частном случае верно и обратное. В более сложных случаях значения функций в разных частях клеток могут не совпадать — часть слагаемых после замены переменных переносится в соседние клетки. Это в основном связано с наличием логарифмических членов в асимптотике. Но всегда в расширяющейся системе прямоугольных кусков таблицы сумма членов в верхних частях клеток равна сумме членов в нижних частях клеток, что и означает равенство (28.21).

Доказательство теоремы 28.2. По построению функции  $A_{m,\xi}A_{3N,x}U(x,\varepsilon)$ , и в силу асимптотических разложений (28.8), (28.13) заключаем, что справедлива оценка

$$|A_{m,\xi}A_{3N,x}U(x,\varepsilon) - A_{3N,x}U(x,\varepsilon)| \leq M \sum_{k=0}^N \varepsilon^{3k} x^{m+1-3k-1} \leq M_1 x^m (1 + \varepsilon^{3N} x^{-3N})$$

и аналогичная оценка для разности вторых производных этих функций. Точно так же справедливы оценки

$$|A_{3N,x}A_{m,\xi}V(\xi,\varepsilon) - A_{m,\xi}V(\xi,\varepsilon)| \leq M \sum_{i=-1}^m \varepsilon^i \xi^{-3N+i} \leq M_1 \xi^{-3N} (\varepsilon^{-1} \xi^{-1} + (\varepsilon \xi)^m),$$

$$\left| \frac{d^2}{d\xi^2} (A_{3N,x} A_{m,\xi} V - A_{m,\xi} V) \right| \leq M \xi^{-3N-2} (\varepsilon^{-1} \xi^{-1} + (\varepsilon \xi)^m).$$

Далее построим составное асимптотическое разложение

$$Y_N(x, \varepsilon) \equiv A_{3N,x} U(x, \varepsilon) + A_{3N,\xi} V(\xi, \varepsilon) - A_{3N,\xi} A_{3N,x} U(x, \varepsilon) + \\ + A_{3N,\eta} W(\eta, \varepsilon),$$

где  $W(\eta, \varepsilon)$  — погранслойный ряд у правого конца отрезка. Из только что полученных неравенств, из оценок (28.18), (28.19) и из основного равенства (28.21) следует, что

$$|L_\varepsilon Y_N(x, \varepsilon) - f| < M \varepsilon^{(3N+3)(1-\gamma)-1} \quad \text{при } x \geq \varepsilon^\gamma,$$

$$|L_\varepsilon Y_N(x, \varepsilon) - f| < M \varepsilon^{(3N+1)\gamma-1} \quad \text{при } x \leq \varepsilon^\gamma.$$

Так как  $Y_N(1, \varepsilon) = O(\varepsilon^{3N+1})$ ,  $Y_N(0, \varepsilon) = O(e^{-\mu/\varepsilon})$ ,  $\mu > 0$ , то из сравнения  $Y_N(x, \varepsilon)$  с  $u(x, \varepsilon)$  и из леммы 28.3 заключаем, что

$$|Y_N(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < M \varepsilon^{(3N+1)\gamma_1-1}, \quad \gamma_1 > 0. \quad \blacktriangledown$$

На рис. 15 для задачи (28.1)–(28.3) при  $q(x) = \sin x$ ,  $f(x) = -\cos x$ ,  $\varepsilon = 1/20$  изображены графики следующих функций:  $u_0(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $A_{3,x} U = \operatorname{ctg} x + 2\varepsilon^3 \operatorname{ctg} x (\sin x)^{-3}$ ,  $A_{1,\xi} V = \varepsilon^{-1} v_{-1}(\xi) + \varepsilon v_1(\xi)$ ,  $Y_{3,1}(x, \varepsilon) \equiv A_{3,x} U + A_{1,\xi} V - A_{3,x} A_{1,\xi} V + A_{3,\eta} W$ . Легко выписать явные

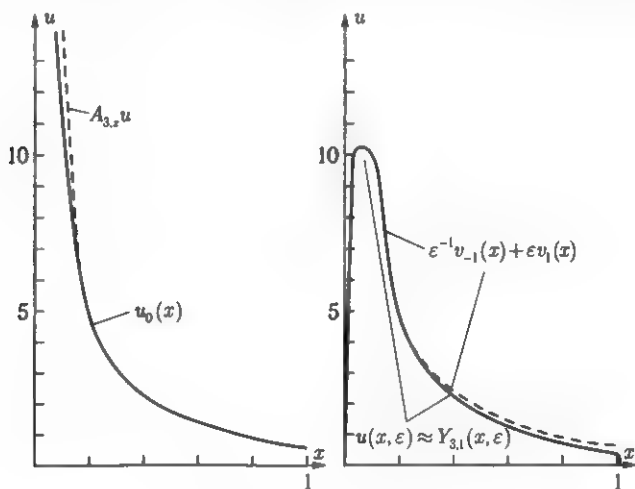


Рис. 15.  $u(x, \varepsilon)$

решения задач (28.11), (28.12):

$$v_{-1}(\xi) = \pi \left\{ \text{Bi}(\xi) \int_{\xi}^{+\infty} \text{Ai}(t) dt + \text{Ai}(\xi) \left[ \int_0^{\xi} \text{Bi}(t) dt - \sqrt{3} \int_0^{+\infty} \text{Ai}(t) dt \right] \right\},$$

$$v_1(\xi) = \pi \left\{ \text{Bi}(\xi) \int_{\xi}^{+\infty} \text{Ai}(t) \left[ \frac{t^3}{6} v_{-1}(t) - \frac{t^2}{2} \right] dt + \right.$$

$$\left. + \text{Ai}(\xi) \int_0^{\xi} \text{Bi}(t) \left[ \frac{t^3}{6} v_{-1}(t) - \frac{t^2}{2} \right] dt - \right.$$

$$\left. - \text{Ai}(\xi) \sqrt{3} \int_0^{+\infty} \text{Ai}(t) \left[ \frac{t^3}{6} v_{-1}(t) - \frac{t^2}{2} \right] dt \right\}.$$

Из теоремы 28.2 вытекает, что всюду на отрезке  $[0; 1]$  справедлива оценка

$$|Y_{3,1}(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^3.$$

**З а м е ч а н и е.** Аналогично рассмотренному примеру можно исследовать задачу (28.1)–(28.3) и в том случае, когда коэффициент  $q(x)$  положителен всюду, кроме какой-нибудь внутренней точки  $x = x_0$ , если в этой точке функция  $q(x)$  имеет нуль конечного порядка (проще всего — нуль второго порядка). Экспоненциальный пограничный слой возникает тогда около обоих концов, а вблизи точки  $x_0$  появляется внутреннее разложение. Его коэффициентами являются функции от внутренней переменной  $\xi$ , которая теперь изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Дифференциальный оператор во внутренней переменной имеет вид  $d^2/d\xi^2 - \xi^{2m}$ , где  $2m$  — порядок нуля  $q(x)$  в точке  $x = x_0$ .

## § 29. Процесс согласования асимптотических разложений

Рассмотрим краевую задачу

$$L_{\varepsilon} u \equiv \varepsilon^2 u'' - b(x) u' - q(x) u = f(x), \quad \varepsilon > 0, \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad (29.1)$$

$$u(0, \varepsilon) = 0, \quad (29.2)$$

$$u(1, \varepsilon) = 0, \quad (29.3)$$

где

$$b(x) = xa(x), \quad a, q, f \in C^{\infty}[0; 1],$$

$$q(x) > 0, \quad a(x) > 0 \quad \text{при } x \in [0; 1], \quad a(0) = 1, \quad q(0) = \mu > 0.$$

Внешнее разложение, как и ранее, будем искать в виде

$$U(x, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} u_{2k}(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (29.4)$$

Уравнения для  $u_{2k}(x)$  имеют вид

$$\begin{cases} b(x)u'_0 + q(x)u_0(x) = -f(x), \\ b(x)u'_{2k} + q(x)u_{2k}(x) = u''_{2(k-1)}(x), \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (29.5)$$

Но теперь  $u_{2k}(x)$  не определяются однозначно из уравнений (29.5). Требовать от ряда  $U(x, \varepsilon)$ , чтобы он удовлетворял граничному условию (29.3), неразумно, так как в точке  $x = 1$  легко ликвидировать невязку в граничном условии с помощью экспоненциального пограничного слоя. А на другом конце, в точке  $x = 0$ , не удастся удовлетворить граничному условию (29.2), так как решения уравнений (29.5) имеют, вообще говоря, особенности.

Поэтому прежде всего исследуем асимптотику решений уравнений (29.5) в нуле и выясним степень неопределенности этих решений. Это легко сделать исходя из явной формулы для решения уравнения

$$l_1 u \equiv b(x)u' + q(x)u(x) = F(x) :$$

$$u(x) = E(x) \left\{ \int_1^x (b(\eta)E(\eta))^{-1} F(\eta) d\eta + C \right\}, \quad (29.6)$$

где

$$E(x) = \exp \left\{ \int_x^1 (b(\theta))^{-1} q(\theta) d\theta \right\},$$

а  $C$  — произвольная постоянная.

Вообще говоря, при гладкой функции  $F(x)$  решение (29.5) имеет особенность в нуле — оно ведет себя как  $x^{-\mu}$ . Но оказывается, что если выбрать постоянную  $C$  специальным образом, то решение  $u(x)$  будет гладкой функцией.

Всюду при рассмотрении этого примера посредством  $s_i(x)$  будем обозначать функции из  $C^\infty[0; 1]$  и их ряды Тейлора при  $x \rightarrow 0$ , опуская индексы там, где это не ведет к недоразумениям.

Из явного вида решения однородного уравнения  $E(x)$  следует, что

$$E(x) = \exp \left\{ \int_x^1 \left[ \frac{\mu}{\theta} + s(\theta) \right] d\theta \right\} = x^{-\mu} s_1(x), \quad \text{а } [E(x)]^{-1} = x^\mu s_2(x).$$



Теперь найдем асимптотику функции (29.6), считая, что  $F(x) \in C^\infty[0; 1]$ :

$$\int_1^x (b(\eta)E(\eta))^{-1} F(\eta) d\eta = \int_1^x \eta^{\mu-1} s(\eta) d\eta = x^\mu s_3(x) + c_0.$$

Отсюда видно, что если выбрать постоянную в формуле (29.6) равной  $(-c_0)$ , то  $u(x) \in C^\infty[0; 1]$ .

Применяя доказанное утверждение последовательно к уравнениям (29.5) и каждый раз выбирая гладкое решение, построим  $u_{2k}(x) \in C^\infty[0; 1]$  и тем самым ряд (29.4). Очевидно, что этот ряд является ф. а. р. уравнения (29.1), но он, вообще говоря, не удовлетворяет условиям (29.2), (29.3).

Про окрестность точки  $x = 1$  уже говорилось, а в окрестности точки  $x = 0$  положение намного сложнее. Сделаем прежде всего замену переменной около этого конца отрезка:  $x = \varepsilon^\alpha \xi$ . Так как порядок второго члена в уравнении (29.1) после такой замены не меняется, то ясно, что надо выбрать  $\alpha = 1$  — тогда все три члена в левой части уравнения будут иметь один порядок.

Итак, после замены запишем внутреннее разложение в виде

$$V(\xi, \varepsilon) \equiv \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (29.7)$$

Можно было бы искать асимптотику решения всей задачи (29.1)–(29.3) в окрестности нуля в виде (29.7). Но так как гладкое ф. а. р. уравнения (29.1) в виде (29.4) уже найдено, то проще искать решение в виде суммы рядов (29.4) и (29.7). Тогда  $V(\xi, \varepsilon)$  должно быть ф. а. р. однородного уравнения.

Однако оказывается, что функции  $v_i(\xi)$  не стремятся к нулю экспоненциально быстро при  $\xi \rightarrow \infty$ . Более того, мы увидим, что ряд (29.4) не является правильным асимптотическим разложением решения  $u(x, \varepsilon)$  внутри отрезка. А если  $\mu < 2$ , то только  $u_0(x)$  является главным членом асимптотики решения  $u(x, \varepsilon)$  внутри отрезка  $[0; 1]$ . Уже следующий член асимптотики — это не  $\varepsilon^2 u_2(x)$ , а совсем другой. Истинная асимптотика решения внутри отрезка  $[0; 1]$  — это сумма ряда (29.4) и другого ряда, коэффициенты которого имеют нарастающие особенности при  $x = 0$ . Так что, несмотря на гладкость функций  $u_{2k}(x)$ , задача (29.1)–(29.3) все-таки бисингулярна.

А теперь вернемся к ряду  $V(\xi, \varepsilon)$ . Однородное уравнение, которому этот ряд должен удовлетворять, выглядит так:

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} - \xi a(\varepsilon \xi) \frac{dV}{d\xi} - q(\varepsilon \xi) V = 0. \quad (29.8)$$

Разлагая коэффициенты в ряды Тейлора:

$$a(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j, \quad q(x) = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} q_j x^j, \quad x \rightarrow 0,$$

получим, как и ранее, систему дифференциальных уравнений:

$$lv_0 \equiv v_0'' - \xi v_0' - \mu v_0 = 0, \quad (29.9)$$

$$lv_i = \xi \sum_{j=1}^i a_j \xi^j v_{i-j}' + \sum_{j=1}^i q_j \xi^j v_{i-j}, \quad i \geq 1. \quad (29.10)$$

Граничное условие (29.2) порождает граничные условия для  $v_k(\xi)$ :

$$\begin{cases} v_{2i}(0) = -u_{2i}(0), \\ v_{2i+1}(0) = 0, \quad i \geq 0. \end{cases} \quad (29.11)$$

Далее всюду до конца исследования задачи (29.1)–(29.3) посредством  $\sigma_j(\xi)$  будем обозначать асимптотические ряды вида  $\sum_{p=0}^{\infty} c_p \xi^{-p}$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , которые допускают почленное дифференцирование любое число раз. Индексы у  $\sigma_j(\xi)$  часто будут опускаться. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 29.1.** *Существует решение системы (29.9), (29.10), удовлетворяющее условиям (29.11), такое что функции  $v_i(\xi) \in C^\infty[0; \infty)$  и*

$$v_i(\xi) \stackrel{\text{as}}{=} \xi^{-\mu} \sum_{j=0}^i \sigma_j(\xi) \xi^{i-j} \ln^j \xi, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (29.12)$$

Для доказательства этой теоремы нам потребуются вспомогательные утверждения.

Прежде всего выпишем решение уравнения  $lv = \varphi$  и найдем его оценку. Известно, что однородное уравнение (29.9) имеет два линейно независимых решения, которые мы обозначим  $Y(\xi)$  и  $Y_1(\xi)$ . Для этих решений справедливы соотношения

$$Y(\xi) \stackrel{\text{as}}{=} \xi^{-\mu} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \xi^{-2j} \right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad Y(\xi) > 0,$$

$$Y_1(\xi) \stackrel{\text{as}}{=} e^{(\xi^2/2)} \xi^{\mu-1} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{c}_j \xi^{-2j} \right), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Легко получить подобную асимптотику из общих свойств решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (см., например, [16, гл. II, § 6]), но еще проще выразить решения уравнения (29.9)

через функции параболического цилиндра, для которых известны и интегральные представления, и асимптотики (см., например, [10], § 10.2).

Непосредственно проверяется, что функция

$$v(\xi) \equiv \int_{\xi}^{\infty} [Y(\xi)Y_1(\theta) - Y_1(\xi)Y(\theta)]e^{-\theta^2/2}\varphi(\theta) d\theta$$

является решением уравнения  $lv = \varphi$ , если  $\varphi(\xi) \in C^\infty[0; \infty)$  и  $\varphi(\xi) = O(\xi^{-N})$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $N > \mu$ . Из этой формулы видно, что

$$v(\xi) = O(\xi^{-N}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (29.13)$$

Далее докажем лемму, вполне аналогичную лемме 28.2.

**Лемма 29.1.** Пусть функция  $g(\xi) \in C^\infty[0; \infty)$  и  $g(\xi) = \xi^{-\mu+p} \ln^i \xi$  при  $\xi > 1$ , где  $i$  и  $p$  — целые неотрицательные числа. Тогда при  $\xi \in [0; \infty)$  существует решение уравнения

$$lv \equiv v'' - \xi v' - \mu v = g(\xi),$$

которое разлагается в асимптотический ряд

$$v(\xi) \stackrel{\text{as}}{=} \xi^{-\mu+p} \sum_{j=0}^{i+1} \sigma_j(\xi) \ln^j \xi, \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (29.14)$$

Этот ряд можно почленно дифференцировать.

Доказательство почти полностью совпадает с доказательством леммы 28.2: достаточно лишь построить ф. а. р. в виде (29.14). Затем надо опереться на оценку (29.13) для остатка и на положительность решения  $Y(\xi)$  — единственного решения однородного уравнения, которое не является быстрорастущим при  $\xi \rightarrow +\infty$ . А формальное построение ряда (29.14) легко получить, если учесть очевидные соотношения

$$l(\xi^{-\mu+p} \ln^i \xi) = \xi^{-\mu+p} (-p \ln^i \xi + c_1 \ln^{i-1} \xi + c_2 \xi^{-2} \ln^i \xi + c_3 \xi^{-2} \ln^{i-1} \xi + \\ + c_4 \xi^{-2} \ln^{i-2} \xi),$$

$$l(\xi^{-\mu} \ln^i \xi) = \xi^{-\mu} (i \ln^{i-1} \xi + c_1 \xi^{-2} \ln^i \xi + c_2 \xi^{-2} \ln^{i-1} \xi + \\ + c_3 \xi^{-2} \ln^{i-2} \xi). \quad \blacktriangledown$$

Доказательство теоремы 29.1. Очевидно, что

$$u_0(\xi) = -u_0(0)[Y(0)]^{-1}Y(\xi).$$

Тогда уравнение для  $v_1(\xi)$  имеет вид:  $lv_1 = \xi^{-\mu+1}\sigma(\xi)$ . Затем надо применить лемму 29.1 к каждому из членов асимптотического ряда  $\sigma(\xi)$

и тем самым построить ф. а. р. уравнения для  $v_1$ . Применяя к остатку оценку (29.13), получим решение

$$v_1(\xi) \stackrel{\text{as}}{=} \xi^{-\mu+1} \sum_{j=0}^l \sigma_j(\xi) \ln^j \xi, \quad \xi \rightarrow +\infty.$$

Добавляя к нему  $cY(\xi)$  с подходящей постоянной  $c$ , добьемся удовлетворения условия (29.11). Далее точно так же, по индукции, доказывается существование остальных  $v_i(\xi)$  и их асимптотика (29.12). ▼

**З а м е ч а н и е.** В действительности, если учитывать четность показателей степеней  $\xi$  в появляющихся рядах, то можно заметить, что логарифмические члены входят с меньшими степенями, чем это утверждается в лемме 29.1 и теореме 29.1. На самом деле асимптотика функций  $v_i(\xi)$  содержит члены  $\ln^j \xi$  лишь при  $2j < i$ . Но чтобы не загромождать выкладки, мы записали асимптотику функций  $v_i(\xi)$  в несколько огрубленном, но зато более простом виде.

Теперь можно приступить к построению той части внешнего разложения, которое должно быть согласовано с рядом  $V(\xi, \varepsilon)$ . Вид этого разложения вытекает из условия согласования: надо рассмотреть ряд  $V(\xi, \varepsilon)$  и формально переписать его во внешней переменной  $x$ . Получается ряд  $\sum_{m=0}^{\infty} \nu_m(\varepsilon) Z_m(x)$ , где  $\nu_m(\varepsilon)$  — калибровочная последовательность функций, а  $Z_m(x)$  — формальные ряды при  $x \rightarrow 0$ .

В нашем примере легко заметить, что  $\nu_m(\varepsilon)$  — это произведения  $\varepsilon^{\mu+k} \ln^l \varepsilon$ ,  $l \leq k$ , а внешнее разложение имеет вид

$$Z(x, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^k z_{k,l}(x) \ln^l \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (29.15)$$

Осталось теперь только найти функции  $z_{k,l}(x)$ .

Уравнения для них получаются непосредственно из уравнения (29.1):

$$b(x)z'_{k,l}(x) + q(x)z_{k,l}(x) = z''_{k-2,l}(x), \quad (29.16)$$

где, в соответствии с (29.15),  $l \leq k$  и функции, у которых хотя бы один индекс отрицателен, считаются тождественно равными нулю.

Кроме того, из условия согласования известны асимптотические ряды для функций  $z_{k,l}(x)$  при  $x \rightarrow 0$ . Действительно, из асимптотики функций  $v_i(\xi)$  (29.12) следует, что для любых  $n \geq 0$ ,  $m \geq 0$  справедливы равенства

$$A_{m,x} A_{n,\xi} V(\xi, \varepsilon) = A_{n,\xi} A_{m,x} Z^*(x, \varepsilon), \quad (29.17)$$

где  $Z^*(x, \varepsilon)$  — точно такой же ряд, как и ряд (29.15), только вместо  $z_{k,l}(x)$  в нем стоят ряды

$$Z_{k,l} \equiv x^{-k} \sum_{j=0}^{k-l} x^j s_j(x) \ln^l x, \quad x \rightarrow 0. \quad (29.18)$$

Для иллюстрации этих соотношений удобно воспользоваться табл. 4, очень похожей на табл. 3, но имеющей более сложный вид.

В каждом столбце этой таблицы стоит асимптотическое разложение функции  $\varepsilon^i \tilde{v}_i(\xi) = \varepsilon^i \xi^\mu v_i(\xi)$  (множитель  $\xi^\mu$  выделен только для удобства записи) при  $\xi \rightarrow \infty$ . Члены этой асимптотики стоят в верхней части каждой клетки. (В соответствии с замечанием к доказательству леммы 29.1 и теоремы 29.1 в таблице не выписаны те члены асимптотических рядов (29.12) функций  $v_i(\xi)$ , коэффициенты при которых в действительности равны нулю. Поэтому отсутствуют члены  $\tilde{z}_{2,2}$ ,  $\tilde{z}_{3,2}$ ,  $\tilde{z}_{3,3}$  и т. д.)

По горизонтали стоят асимптотические ряды  $\varepsilon^i \tilde{z}_{k,i}(\xi)$ ,  $\tilde{z}_{k,i}(x) = \varepsilon^{-\mu} x^\mu Z_{k,i}(x)$ . Члены этих рядов располагаются в нижней части клеток данной строки.

Видно, что теперь не во всех клетках значения в верхней и нижней частях совпадают. При замене  $\ln \xi = \ln x - \ln \varepsilon$  одна часть выражения переходит в ту же клетку, а другая часть — в соседние. Но коэффициенты рядов  $Z_{k,l}$  строятся так, чтобы соотношения (29.17) были выполнены.

Фактически построение асимптотики решения задачи (29.1)–(29.3) закончено. Надо только построить еще функции экспоненциального погранслоя у правого конца отрезка. Этот ряд имеет такой же вид, как в § 24. Только теперь он должен компенсировать невязки как от ряда (29.4), так и от ряда (29.13). Так что

$$W(\eta, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_k(\eta) + \varepsilon^\mu \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^k w_{k,l}(\eta) \ln^l \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (29.19)$$

где  $\eta \equiv \varepsilon^{-1}(1-x)$ .

Построение функций  $w_k(\eta)$  и  $w_{k,l}(\eta)$  очевидно, и мы не будем на этом останавливаться. Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 29.2.** *Существуют функции  $z_{k,l}(x) \in C^\infty(0, 1]$ ,  $2l \leq k$ , удовлетворяющие системе (29.16) и имеющие при  $x \rightarrow 0$  асимптотические разложения  $Z_{k,l}$ , определенные формулами (29.18). Таким образом, для рядов (29.7) и (29.15) выполнены условия согласования (29.17), где вместо  $Z^*(x, \varepsilon)$  стоит  $Z(x, \varepsilon)$ .*

Таблица 4

$\tilde{Z}_\varepsilon, \tilde{V}_\varepsilon$	$\tilde{v}_0$	$\varepsilon \tilde{v}_1$	$\varepsilon^2 \tilde{v}_2$	$\varepsilon^3 \tilde{v}_3$	$\varepsilon^4 \tilde{v}_4$	...
$\tilde{z}_{0,0}$	$c_0$ $c_0 x^{-1}$	$\varepsilon c_{1,-1} \xi$ $c_{1,-1} x$	$\varepsilon^2 c_{2,-2} \xi^2$ $c_{2,-2} x^2$	$\varepsilon^3 c_{3,-3} \xi^3$ $c_{3,-3} x^3$	$\varepsilon^4 c_{4,-4} \xi^4$ $c_{4,-4} x^4$	...
$\varepsilon \tilde{z}_{1,0}$	—	$\varepsilon c_{1,0}$ $\varepsilon c_{1,0}$	$\varepsilon^2 c_{2,-1} \xi$ $\varepsilon c_{2,-1} x$	$\varepsilon^3 c_{3,-2} \xi^2$ $\varepsilon c_{3,-2} x^2$	$\varepsilon^4 c_{4,-3} \xi^3$ $\varepsilon c_{4,-3} x^3$	...
$\varepsilon^2 \ln \varepsilon \tilde{z}_{2,1}$	—	—	$\varepsilon^2 d_{2,0} \ln \xi$ $-(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) d_{2,0}$	$\varepsilon^3 d_{3,-1} \xi \ln \xi$ $-(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) d_{3,-1} x$	$\varepsilon^4 d_{4,-2} \xi^2 \ln \xi$ $-(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) d_{4,-2} x^2$	...
$\varepsilon^2 \tilde{z}_{2,0}$	$c_{0,2} \xi^{-2}$ $\varepsilon^2 c_{0,2} x^{-2}$	$\varepsilon c_{1,1} \xi^{-1}$ $\varepsilon^2 c_{1,1} x^{-1}$	$\varepsilon^2 c_{2,0}$ $\varepsilon^2 (c_{2,0} + d_{2,0} \ln x)$	$\varepsilon^3 c_{3,-1} \xi$ $\varepsilon^2 x (c_{3,-1} + d_{3,-1} \ln x)$	$\varepsilon^4 c_{4,-2} \xi^2$ $\varepsilon^2 x^2 (c_{4,-2} + d_{4,-2} \ln x)$	...
$\varepsilon^3 \ln \varepsilon \tilde{z}_{3,1}$	—	—	$-(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) d_{2,0}$	$\varepsilon^3 d_{3,0} \ln \xi$ $-(\varepsilon^3 \ln \varepsilon) d_{3,0} x$	$\varepsilon^4 d_{4,-1} \xi \ln \xi$ $-(\varepsilon^3 \ln \varepsilon) d_{4,-1} x$	...
$\varepsilon^3 \tilde{z}_{3,0}$	—	$\varepsilon c_{1,2} \xi^{-2}$ $\varepsilon^3 c_{1,2} x^{-2}$	$\varepsilon^2 c_{2,1} \xi^{-1}$ $\varepsilon^3 c_{2,1} x^{-1}$	$\varepsilon^3 c_{3,0}$ $\varepsilon^3 x (c_{3,0} + d_{3,0} \ln x)$	$\varepsilon^4 c_{4,-1} \xi$ $\varepsilon^3 x (c_{4,-1} + d_{4,-1} \ln x)$	...
$\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon \tilde{z}_{4,2}$	—	—	—	—	$\varepsilon^4 e_{4,0} \ln^2 \xi$ $(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon) e_{4,0}$	...
$\varepsilon^4 \ln \varepsilon \tilde{z}_{4,1}$	—	—	$\varepsilon^2 d_{2,2} \xi^{-2} \ln \xi$ $-(\varepsilon^4 \ln \varepsilon) d_{2,2} x^{-2}$	$\varepsilon^3 d_{3,1} \xi^{-1} \ln \xi$ $-(\varepsilon^4 \ln \varepsilon) d_{3,1} x^{-1}$	$\varepsilon^4 d_{4,0} \ln \xi$ $-(\varepsilon^4 \ln \varepsilon) (d_{4,0} + 2e_{4,0} \ln x)$	...
$\varepsilon^4 \tilde{z}_{4,0}$	$c_{0,4} \xi^{-4}$ $\varepsilon^4 c_{0,4} x^{-4}$	$\varepsilon c_{1,3} \xi^{-3}$ $\varepsilon^4 c_{1,3} x^{-3}$	$\varepsilon^2 c_{2,2} \xi^{-2}$ $\varepsilon^4 x^{-2} (c_{2,2} + d_{2,2} \ln x)$	$\varepsilon^3 c_{3,1} \xi^{-1}$ $\varepsilon^4 x^{-1} (c_{3,1} + d_{3,1} \ln x)$	$\varepsilon^4 c_{4,0}$ $\varepsilon^4 x^2 (c_{4,0} + d_{4,0} \ln x + e_{4,0} \ln^2 x)$	...
...	...	...	...	...	...	...

**Теорема 29.3.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — какие-нибудь числа, такие что  $0 < \beta < \alpha < 1$ . Тогда сумма рядов (29.4) и (29.7) является равномерным асимптотическим разложением функции  $u(x, \varepsilon)$  — решения задачи (29.1)–(29.3) на отрезке  $[0; \varepsilon^\beta]$ . Сумма рядов (29.4), (29.15) и (29.19) является равномерным асимптотическим разложением того же решения на отрезке  $[\varepsilon^\alpha; 1]$ .

Для составного асимптотического разложения справедливы оценки

$$|A_{N,x}U(x, \varepsilon) + A_{N,x}Z(x, \varepsilon) + A_{N,x}V(\xi, \varepsilon) - A_{N,x}A_{N,\xi}V(\xi, \varepsilon) + A_{N,\eta}W(\eta, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^{N_1}, \quad (29.20)$$

где  $N_1 \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Здесь  $U(x, \varepsilon)$ ,  $Z(x, \varepsilon)$ ,  $V(\xi, \varepsilon)$  и  $W(\eta, \varepsilon)$  — это ряды (29.4), (29.15), (29.7) и (29.19) соответственно.

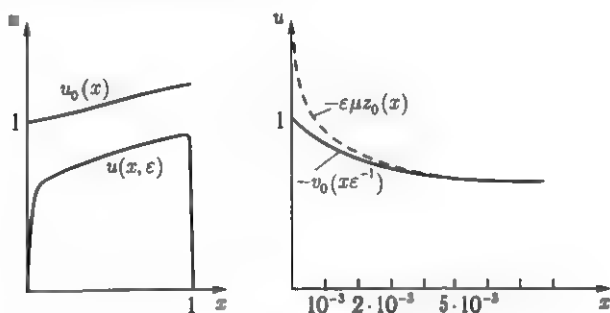


Рис. 16.  $u(x, \varepsilon)$

На рис. 16 приведены график решения краевой задачи

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 u'' - \operatorname{tg} x \cdot u' - \mu u = -\mu(1+x),$$

$$u(0, \varepsilon) = u(1, \varepsilon) = 0,$$

при  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\mu = 1/5$ , а также графики некоторых членов асимптотических приближений  $u_0(x)$ ,  $z_0(x)$  и  $v_0(\xi)$ .

Здесь

$$u_0(x) = 1 + x - (\sin x)^{-\mu} \int_0^x (\sin t)^\mu dt,$$

$$z_0(x) = -2^{-\mu/2} C (\sin x)^{-\mu}, \quad v_0(\xi) = -CH_{-\mu}(\xi/\sqrt{2}),$$

$$C = \frac{\Gamma((1+\mu)/2)}{\Gamma(1/2)},$$

$H_\nu(y)$  — функция Эрмита [10, § 10.2].

Видно, что второй член ряда (29.4) не играет заметной роли, тогда как первые члены рядов (29.7) и (29.15) весьма существенны.

Интересно отметить, что коэффициент при старшем члене уравнения на шесть порядков (!) меньше остальных коэффициентов. Тем не менее если рассматривать лишь ряд (29.4), то даже далеко от границы, в точке  $x = 1/2$ , ошибка составит более 20 %. Только правильное согласование внешнего и внутреннего разложений дает удовлетворительный результат.

Действительно, обозначим

$$Y_{\mu,\varepsilon}(x) = u_0(x) + \varepsilon^\mu z_0(x) + v_0(\xi) + 2^{-\mu/2} C \xi^{-\mu}.$$

Тогда из теоремы 29.3 и из анализа структуры членов рядов (29.4), (29.7) и (29.15) вытекает, что при  $x < 1 - \delta$  ( $\delta > 0$ ) справедлива оценка

$$|Y_{\mu,\varepsilon}(x) - u(x, \varepsilon)| < M \varepsilon^{\mu+2} |\ln \varepsilon|.$$

(Равномерная асимптотика вблизи конца  $x = 1$  получается добавлением ряда (29.19) и не представляет какого-либо интереса.)

Если рассмотреть оператор  $L_\varepsilon$  от  $Y_{\mu,\varepsilon}(x)$  и оценить его величину при указанных выше значениях  $\mu$  и  $\varepsilon$ , то даже грубая оценка приводит к неравенству

$$|Y_{\mu,\varepsilon}(x) - u(x, \varepsilon)| < 10^{-5} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 0,99.$$

Таким образом, графики  $u(x, \varepsilon)$  и  $Y_{\mu,\varepsilon}(x)$  на рис. 16 практически неразличимы.

Доказательство теоремы 29.2. Прежде всего покажем, что ряды (29.18) являются ф. а. р. системы (29.16). Складывая почленно уравнения (29.9), (29.10), умноженные на  $\varepsilon^i$ , получаем равенство

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} (A_{n,\xi} V(\xi, \varepsilon)) - \xi a(\varepsilon \xi) \frac{d}{d\xi} (A_{n,\xi} V(\xi, \varepsilon)) - q(\varepsilon \xi) A_{n,\xi} V(\xi, \varepsilon) = \\ &= \xi \sum_{i=0}^n \varepsilon^i v'_i(\xi) \left( \sum_{j=0}^{n-i} \varepsilon^j \xi^j a_j - a(\varepsilon \xi) \right) + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i v_i(\xi) \left( \sum_{j=0}^{n-i} \varepsilon^j \xi^j q_j - q(\varepsilon \xi) \right), \end{aligned}$$

или, в переменной  $x$ ,

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} (A_{n,\xi} V(\xi, \varepsilon)) - x a(x) \frac{d}{dx} (A_{n,\xi} V(\xi, \varepsilon)) - q(x) A_{n,\xi} V(\xi, \varepsilon) = \\ &= x \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \frac{d}{dx} v_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \left[ \sum_{j=0}^{n-i} a_j x^j - a(x) \right] + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i v_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \left[ \sum_{j=0}^{n-i} q_j x^j - q(x) \right]. \end{aligned} \quad (29.21)$$



Теперь применим к обеим частям этого равенства оператор  $A_{m+\mu, x}$ , учитывая, что

$$A_{m+\mu, x} A_{n, \xi} V(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^\mu \sum_{l=0}^m \varepsilon^l \sum_{j=0}^l B_{n-l-\mu} Z_{l, j} \ln^j \varepsilon.$$

После этого в получившемся уравнении имеются лишь конечные суммы членов вида  $\varepsilon^{\mu+l} \ln^j \varepsilon \varphi_{l, j}(x)$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon^{\mu+l} \ln^j \varepsilon$ , получаем систему уравнений для  $B_{n-l-\mu} Z_{l, j}$ , которая мало отличается от системы (29.16). А именно, существует лишь отличие в правых частях уравнений на функции, которые быстро стремятся к нулю при  $x \rightarrow 0$ :

$$b(x)(B_{n-\mu} Z_{0,0})'_x + q(x) B_{n-\mu} Z_{0,0} = O(x^{-\mu+n}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$b(x)(B_{n-1-\mu} Z_{1,0})'_x + q(x) B_{n-1-\mu} Z_{1,0} = O(x^{-\mu+n-1}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$b(x)(B_{n-2-\mu} Z_{2,0})'_x + q(x) B_{n-2-\mu} Z_{2,0} = (B_{n-\mu} Z_{0,0})''_x + O(x^{-\mu+n-2}), \\ x \rightarrow 0,$$

и т.д. Отсюда вытекает, что ряды  $Z_{k, l}(x)$  — это ф.а.р. уравнений (29.16) при  $x \rightarrow 0$ .

Для завершения доказательства теоремы 29.2 нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 29.2.** Пусть функция  $F(x) \in C^\infty(0, 1]$  и разлагается в асимптотический ряд

$$F(x) \stackrel{\text{ас}}{=} x^{-\mu-l} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=0}^k a_{k, j} \ln^j x, \quad x \rightarrow 0,$$

и этот ряд допускает многократное почленное дифференцирование, а ряд

$$Z(x) \equiv x^{-\mu-l} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=0}^k b_{k, j} \ln^j x, \quad x \rightarrow 0, \quad (29.22)$$

является ф.а.р. уравнения

$$l_1 Z \equiv b(x) Z' + q(x) Z = F(x) \quad (29.23)$$

при  $x \rightarrow 0$ . Тогда существует решение этого уравнения  $z(x)$ , которое разлагается в асимптотический ряд (29.22), допускающий почленное дифференцирование любое число раз.

Доказательство леммы 29.2. Рассмотрим частичную сумму  $z_N(x) \equiv B_N Z$ . По определению для нее справедливо равенство

$$l_1 z_N = F(x) + \varphi_N(x),$$

где

$$\varphi_N(x) = O(x^{N_1}), \quad x \rightarrow 0 \text{ и } N_1 \rightarrow \infty \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

В соответствии с формулой (29.6) построим функцию  $y_N(x)$  — решение уравнения  $l_1 y_N(x) = \varphi_N(x)$ :

$$y_N(x) = E(x) \int_0^x [b(\eta)E(\eta)]^{-1} \varphi_N(\eta) d\eta,$$

где  $E(x) \equiv \exp\left(\int_x^1 [b(\theta)]^{-1} q(\theta) d\theta\right).$

Из оценки функции  $\varphi_N(x)$  вытекает, что  $|y_N(x)| < M x^{N_1}$ .

Положим  $w_N(x) \equiv z_N(x) - y_N(x)$ . По построению функция  $w_N(x)$  удовлетворяет уравнению (29.23). Осталось лишь показать, что  $w_N(x)$  не зависит от номера  $N$ .

Действительно,  $\delta_N(x) \equiv w_{N+1}(x) - w_N(x)$  — это решение уравнения  $l_1 \delta_N = 0$ , для которого справедлива оценка  $|\delta_N(x)| < M x^{N_1}$ . Следовательно,  $\delta_N(x) = cE(x)$  и, в силу асимптотики  $E(x)$ , постоянная  $c = 0$ .

Возможность почленного дифференцирования ряда (29.22) вытекает непосредственно из уравнения (29.23). ▼

Теперь для завершения доказательства теоремы 29.2 осталось применить лемму 29.2 последовательно к уравнениям (29.16) и учесть тот факт, что  $Z_{k,l}$  являются ф. а. р. этой системы. ▼

Доказательство теоремы 29.3 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 28.2. Надо проверить, что

а) ряд (29.4) является ф. а. р. уравнения (29.1) равномерно на отрезке  $[0; 1]$ ;

б) ряд (29.7) является ф. а. р. уравнения (29.8) при  $x \ll 1$ ;

в) ряд (29.15) является ф. а. р. уравнения  $L_\varepsilon Z = 0$  при  $x/\varepsilon \gg 1$ ;

г) ряд (29.19) является ф. а. р. уравнения  $L_\varepsilon W = 0$  на отрезке  $[0; 1]$ ;

д) выполнены условия согласования рядов  $Z(x, \varepsilon)$  и  $V(\xi, \varepsilon)$ ;

е) ряд  $U(x, \varepsilon) + V(\xi, \varepsilon)$  удовлетворяет граничному условию (29.2), а ряд  $U(x, \varepsilon) + W(\eta, \varepsilon)$  — условию (29.3).

Утверждение (а) вытекает из соотношения  $L_\varepsilon(A_{2n,x}U(x, \varepsilon)) = f(x) + \varepsilon^{2n+2}u''_{2n}(x)$ .

Утверждение (б) следует из (29.21):  $|L_\varepsilon(A_{n,\xi}V(\xi, \varepsilon))| \leq M x^n$ .

Утверждение (в) следует из соотношений (29.16) и (29.18):

$$\begin{aligned} |L_\varepsilon(A_{n+\mu,x}Z(x, \varepsilon))| &= \left| \varepsilon^{\mu+n+2} \sum_{l=0}^n \frac{d^2 z_{n,l}}{dx^2} \right| \leq \\ &\leq M \varepsilon^{\mu+n+2} (1 + x^{-\mu-n-2} |\ln^n x|). \end{aligned}$$

Утверждение (д) — это условие (29.17), на основании которого и строился ряд  $Z(x, \epsilon)$ .

Утверждения (г) и (е) очевидны — они проверяются точно так же, как в предыдущих примерах.

Далее, доказательство оценки (29.20) почти не отличается от доказательства теоремы 28.2. При этом надо учесть, что  $q(x) \geq q_0 > 0$ , и поэтому для решения уравнения  $L_\epsilon \psi = \varphi$  справедлива оценка

$$|\psi(x)| \leq |\psi(0)| + |\psi(1)| + q_0^{-1} \max_{0 \leq x \leq 1} |\varphi(x)|. \quad \blacktriangledown$$

### § 30. Асимптотика интеграла, зависящего от произведения разномасштабных функций

В этом параграфе будет рассмотрена асимптотика интегралов от функций, зависящих от малого параметра  $\epsilon$ . Такая задача тесно связана с другими задачами, зависящими от малого параметра. Наибольший интерес представляет, конечно, сингулярный случай, т.е. тот случай, при котором для  $\epsilon = 0$  интеграл расходится. Часто возникает необходимость исследовать асимптотику функции, заданной интегралом от произведения двух функций с разномасштабными (относительно интересующей переменной) аргументами. Ниже разные методики вычисления асимптотики таких интегралов будут продемонстрированы на трех различных примерах.

#### I. Начнем с интеграла

$$I(\epsilon) \equiv \int_0^1 \frac{h(x)}{\sqrt{x^4 + \epsilon^4}} dx,$$

где  $h(x)$  — гладкая функция.

При  $\epsilon = 0$  интеграл, вообще говоря, расходится. Идея вычислений состоит в хорошо известном и достаточно широко распространенном методе регуляризации, т.е. вычитания особенностей.

Прежде всего представим числитель в виде суммы нескольких членов ряда Тейлора функции  $h(x)$  и остатка:

$$h(x) = P_5(x) + (h(x) - P_5(x)),$$

где

$$P_5(x) = \sum_{k=0}^5 \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Так как  $h(x) - P_5(x) = O(x^6)$ , то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{h(x) - P_5(x)}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} dx &= \int_0^1 \frac{h(x) - P_5(x)}{x^2} dx + \\ &+ \int_0^1 (h(x) - P_5(x)) \left( \frac{1}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} - \frac{1}{x^2} \right) dx. \end{aligned}$$

В связи с тем что

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} - \frac{1}{x^2} \right| = \frac{\varepsilon^4}{x^2(\sqrt{x^4 + \varepsilon^4})(x^2 + \sqrt{x^4 + \varepsilon^4})} = O(\varepsilon^4 x^{-6}),$$

справедливо равенство

$$\int_0^1 \frac{h(x) - P_5(x)}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} dx = \int_0^1 \frac{h(x) - P_5(x)}{x^2} dx + O(\varepsilon^4)$$

и, тем самым,

$$I(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{P_5(x)}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} dx + \int_0^1 \frac{h(x) - P_5(x)}{x^2} dx + O(\varepsilon^4), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (30.1)$$

Далее осталось лишь вычислить асимптотики интегралов

$$I_k(\varepsilon) \equiv \int_0^1 \frac{x^k dx}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}},$$

или, сделав замену  $x = \varepsilon y$ ,

$$I_k(\varepsilon) = \varepsilon^{k-1} \int_0^{1/\varepsilon} \frac{y^k dy}{\sqrt{y^4 + 1}}.$$

Отметим, что получившиеся после замены переменной интегралы, вообще говоря, имеют особенность за счет стремления предела интегрирования к  $\infty$ , поэтому для получения асимптотики этих интегралов потребуется еще и регуляризация подынтегральных функций в бесконечно удаленной точке путем выделения их особенностей при  $y \rightarrow \infty$ .

Поскольку  $\frac{1}{\sqrt{1+y^{-4}}} = 1 - \frac{1}{2}y^{-4} + O(y^{-8})$  при  $y \rightarrow \infty$ , то, обозначив

$$g(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+y^{-4}}} - 1 + \frac{1}{2}y^{-4}, \quad (30.2)$$

получим

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^{-4}}} = g(y) + 1 - \frac{1}{2}y^{-4}, \quad g(y) = O(y^{-8}), \quad y \rightarrow \infty. \quad (30.3)$$

Итак,

$$\begin{aligned} I_0(\varepsilon) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} dx = \varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon^{-1}} \frac{dy}{y^2 \sqrt{1 + y^{-4}}} = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{1 + y^4}} - \varepsilon^{-1} \int_{\varepsilon^{-1}}^{\infty} y^{-2} \left( 1 - \frac{1}{2}y^{-4} + O(y^{-8}) \right) dy = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + y^4}} dy - 1 + \frac{1}{10} \varepsilon^4 + O(\varepsilon^8), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} dx = \int_0^{\varepsilon^{-1}} \frac{y dy}{y^2 \sqrt{1 + y^{-4}}} = \\ &= \int_0^1 \frac{dy}{y \sqrt{1 + y^{-4}}} + \int_1^{\varepsilon^{-1}} \frac{1}{y} \left( 1 - \frac{1}{2}y^{-4} + g(y) \right) dy, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (30.3),

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1 + y^4}} - \ln \varepsilon - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \varepsilon^4 + \int_1^{\infty} y^{-1} g(y) dy + O(\varepsilon^8), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

При  $1 < k < 5$  имеем

$$\begin{aligned} I_k(\varepsilon) &= \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} dx = \varepsilon^{k-1} \int_0^{\varepsilon^{-1}} \frac{y^k dy}{y^2 \sqrt{1 + y^{-4}}} = \\ &= \varepsilon^{k-1} \int_0^1 \frac{y^{k-2} dy}{\sqrt{1 + y^{-4}}} + \varepsilon^{k-1} \int_1^{\varepsilon^{-1}} y^{k-2} \left( 1 - \frac{1}{2}y^{-4} + g(y) \right) dy, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при  $1 < k < 5$  с учетом (30.3) получим

$$I_k(\varepsilon) = \varepsilon^{k-1} \int_0^1 \frac{y^k dy}{\sqrt{1+y^4}} - \frac{\varepsilon^{k-1}}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \frac{\varepsilon^{k-1}}{2(k-5)} - \frac{\varepsilon^4}{2(k-5)} + \\ + \varepsilon^{k-1} \int_1^\infty y^{k-2} g(y) dy + O(\varepsilon^8), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Наконец,

$$I_5(\varepsilon) = \varepsilon^4 \int_0^1 \frac{y^5 dy}{\sqrt{1+y^4}} - \frac{\varepsilon^4}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \varepsilon + \varepsilon^4 \int_1^\infty y^3 g(y) dy + O(\varepsilon^8), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Объединяя полученные равенства, с учетом (30.1) и (30.2), приходим к следующему соотношению:

$$\int_0^1 \frac{h(x)}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} dx = \int_0^1 \frac{h(x) - P_5(x)}{x^2} dx + \varepsilon^{-1} h(0) \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} dy + \\ + \ln \varepsilon \left( \frac{h^{(5)}(0)}{2 \cdot 5!} - h'(0) \right) + h'(0) \left( \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1+y^4}} + \int_1^\infty y^{-1} g(y) dy \right) - h(0) + \\ + \frac{h''(0)}{2} + \frac{h'''(0)}{12} + \frac{h^{(4)}(0)}{72} + \frac{h^{(5)}(0)}{480} + \varepsilon \left( \frac{h''(0)}{2} \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{1+y^4}} - \frac{7}{6} + \right. \\ \left. + \int_1^\infty g(y) dy \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{h'''(0)}{6} \int_0^1 \frac{y^3 dy}{\sqrt{1+y^4}} - \frac{3}{4} + \int_1^\infty y g(y) dy \right) + \\ + \varepsilon^3 \left( \frac{h^{(4)}(0)}{24} \int_0^1 \frac{y^4 dy}{\sqrt{1+y^4}} - \frac{5}{6} + \int_1^\infty y^2 g(y) dy \right) + O(\varepsilon^4), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где функция  $g(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} - 1 + \frac{1}{2} y^{-4}$ .

**II.** Другой подход к решению той же задачи связан с «методом введения вспомогательного параметра». Этот метод также оказывается полезным в различных ситуациях. Он к тому же тесно перекликается с описанным выше в этом параграфе рассмотрением внешнего и внутреннего асимптотических разложений. Идеи, лежащие в основе этого метода, проиллюстрируем на следующем примере.

Пусть теперь

$$I(\varepsilon) \equiv \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} dx$$

и нас интересует поведение этого интеграла при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Прежде всего отметим, что подынтегральное выражение есть произведение двух функций:  $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$  и  $h(x/\varepsilon) = \varepsilon^{-2} \times (1 + (x/\varepsilon)^4)^{-1/2}$  — с разномасштабными ( $x$  и  $x/\varepsilon$ ) аргументами. Далее отметим, что «предельная» (при  $\varepsilon = 0$ ) подынтегральная функция имеет неинтегрируемую особенность в точке  $x = 0$ , поэтому, видимо, асимптотика функции  $f(\varepsilon)$  начинается не с константы. Наконец, при конечных  $x$  подынтегральная функция имеет степенное (относительно  $\varepsilon$  и с коэффициентами, зависящими от  $x$ ) асимптотическое разложение

$$\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^{4n} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^{2+4n}} \quad (\varepsilon/x < 1), \quad (30.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = (1+t)^{-1/2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -1/2, \quad a_2 = 3/8, \dots,$$

которое перестает быть асимптотическим при  $x = \varepsilon$  (тем самым непригодно на всем отрезке  $[0; 1]$ ).

С другой стороны, при малых  $x$  можно получить другое, тоже степенное (с коэффициентами, зависящими от  $\xi = x/\varepsilon$ ) разложение подынтегральной функции

$$\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon^{n-2} \frac{\xi^n}{\sqrt{\xi^4 + 1}}, \quad \xi = x/\varepsilon < 1, \quad (30.5)$$

полученное следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} &= \frac{\sqrt{(\varepsilon\xi)^2 + \varepsilon\xi + 1}}{\varepsilon^2 \sqrt{\xi^4 + 1}} = \frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt{\xi^4 + 1}} (1 + ((\varepsilon\xi)^2 + \varepsilon\xi))^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt{\xi^4 + 1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n ((\varepsilon\xi)^2 + \varepsilon\xi)^n = \frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt{\xi^4 + 1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\varepsilon\xi)^n (\varepsilon\xi + 1)^n = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt{\xi^4 + 1}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon^n \xi^n, \end{aligned}$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1/2, \quad b_3 = 3/8, \quad b_4 = -3/16, \dots$$

Это разложение тоже непригодно на всем отрезке  $[0; 1]$ . Таким образом, у подынтегрального выражения имеется два естественных

разложения: внешнее (30.4) — при конечных  $x$  и внутреннее (30.5) — при бесконечно малых  $x$ . При этом в промежутках вида  $x \in (\varepsilon^p; \varepsilon^q)$ ,  $0 < q < p < 1$ , оба асимптотических разложения справедливы. Эти соображения подсказывают идею разбиения отрезка интегрирования на два с помощью введения дополнительного параметра  $\mu \in (\varepsilon^p; \varepsilon^q)$ ,  $0 < q < p < 1$ .

Итак, пусть

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} dx = \int_0^\mu + \int_\mu^1 = I_1(\varepsilon, \mu) + I_2(\varepsilon, \mu),$$

$$\mu \in (\varepsilon^p; \varepsilon^q), \quad 0 < q < p < 1.$$

Воспользовавшись внешним разложением (30.4), получим

$$I_2(\varepsilon, \mu) \stackrel{\text{ас}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^{4n} \int_\mu^1 \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^{2+4n}} dx \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

При этом

$$\varepsilon^{4n} \int_\mu^1 \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^{2+4n}} dx = O\left(\varepsilon^{4n} \int_\mu^1 \frac{1}{x^{2+4n}} dx\right) = O\left(\frac{\varepsilon^{4n}}{\mu^{4n+1}}\right),$$

т. е. чем больше  $\mu$ , тем оценка меньше. При  $\mu = \varepsilon^\alpha$  получим

$$O\left(\frac{\varepsilon^{4n}}{\mu^{4n+1}}\right) = O(\varepsilon^{4n(1-\alpha)-\alpha}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Воспользовавшись внутренним разложением (30.5) и сделав в интеграле  $I_1(\varepsilon, \mu)$  замену переменной  $\xi = x/\varepsilon$ , получим

$$I_1(\varepsilon, \mu) = \varepsilon \int_0^{\mu/\varepsilon} \frac{\sqrt{(\varepsilon\xi)^2 + \varepsilon\xi + 1}}{\varepsilon^2 \sqrt{\xi^4 + 1}} d\xi \stackrel{\text{ас}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon^{n-1} \int_0^{\mu/\varepsilon} \frac{\xi^n}{\sqrt{\xi^4 + 1}} d\xi, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

При этом если  $n > 2$ , то

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n-1} \int_0^{\mu/\varepsilon} \frac{\xi^n}{\sqrt{\xi^4 + 1}} d\xi &\stackrel{n \geq 2}{=} O\left(\varepsilon^{n-1} \int_0^{\mu/\varepsilon} \xi^{n-2} d\xi\right) = O\left(\varepsilon^{n-1} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{n-1}\right) = \\ &= O(\mu^{n-1}), \end{aligned}$$

т. е. чем меньше  $\mu$ , тем оценка меньше. При  $\mu = \varepsilon^\alpha$  получим

$$O(\mu^{n-1}) = O(\varepsilon^{(n-1)\alpha}).$$



Найдем  $f(\varepsilon)$  с точностью  $o(\varepsilon)$ . Тогда для приближения  $I_1(\varepsilon, \mu)$  число слагаемых  $n_1$  надо взять из условия  $(n-1)\alpha > 1$ , т.е.  $n_1 > 1 + 1/\alpha > 2$ , а для  $I_2(\varepsilon, \mu)$  — из условия  $4n_2(1-\alpha) > 1$ , т.е.  $n_2 > (1+\alpha)/(4-4\alpha) > 0$ . Взяв  $\alpha = 4/7$ , получим, что для нахождения  $I_1(\varepsilon, \mu)$  с нужной точностью надо взять  $n = 3$ , а для  $I_2(\varepsilon, \mu)$  —  $n = 1$ . (Разумеется, можно было взять  $\alpha$  любым из  $(0; 1)$ , но при выбранном  $\alpha$  число слагаемых, а priori обеспечивающих заданную точность асимптотического представления, наименьшее.)

Итак, при  $\mu = \varepsilon^{4/7}$

$$I_2(\varepsilon, \mu) = \int_{\mu}^1 \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^2} dx + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Если подынтегральное выражение в интеграле  $\int_{\mu}^1 F(x) dx$  не имеет неинтегрируемых особенностей на  $[0; 1]$  и в точке  $x = 0$  имеет степенное асимптотическое разложение  $F(x) \stackrel{\text{ас}}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ ,  $x \rightarrow 0$ , то асимптотика этого интеграла при  $\mu \rightarrow 0$  получается просто:

$$\int_{\mu}^1 F(x) dx = \int_0^1 F(x) dx - \int_0^{\mu} F(x) dx \stackrel{\text{ас}}{\sim} \int_0^1 F(x) dx - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n+1} \mu^{n+1}, \quad \mu \rightarrow 0.$$

Однако в нашем случае функция  $\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^2}$  имеет в нуле неинтегрируемую особенность. Но

$$\begin{aligned} x^{-2} \sqrt{x^2 + x + 1} &= x^{-2} \left( 1 + \frac{1}{2}(x + x^2) - \frac{1}{8}(x + x^2)^2 + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8} + O(x), \end{aligned}$$

поэтому данный интеграл можно регуляризовать путем явного выделения особенностей. Функция

$$\varphi(x) \equiv \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} \quad (30.6)$$

уже не имеет неинтегрируемой особенности в точке  $x = 0$ . Тем самым

$$\int_{\mu}^1 \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^2} dx = \int_{\mu}^1 \varphi(x) dx + \int_{\mu}^1 \frac{dx}{x^2} + \int_{\mu}^1 \frac{dx}{2x} = \int_{\mu}^1 \varphi(x) dx - 1 + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2} \ln \mu,$$

а

$$\int_{\mu}^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx - \int_0^{\mu} \varphi(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx - \frac{3}{8} \mu + O(\varepsilon^{8/7}).$$

Итак,

$$I_2(\varepsilon, \mu) = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2} \ln \mu + \int_0^1 \varphi(x) dx - 1 - \frac{3}{8} \mu + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (30.7)$$

При выбранном  $\mu$  надо в выражении для  $I_1(\varepsilon, \mu)$  взять три слагаемых:

$$I_1(\varepsilon, \mu) = \varepsilon^{-1} \int_0^{\mu/\varepsilon} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}} + \frac{1}{2} \int_0^{\mu/\varepsilon} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}} + \frac{3\varepsilon}{8} \int_0^{\mu/\varepsilon} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}} + o(\varepsilon),$$

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

и при этом надо найти асимптотику каждого слагаемого с точностью  $o(\varepsilon)$ . Отметим, что  $\varepsilon/\mu = \varepsilon^{3/7}$ .

Если подынтегральное выражение в интеграле  $\int_0^{\mu/\varepsilon} H(\xi) d\xi$  не имеет неинтегрируемых особенностей на  $[0; +\infty]$  и в точке  $\xi = +\infty$  имеет степенное асимптотическое разложение  $H(\xi) \stackrel{\text{as}}{\sim} \sum_{n=2}^{\infty} B_n \xi^{-n}$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ , то асимптотика при  $\nu \rightarrow +\infty$  снова получается просто:

$$\int_0^{\nu} H(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} H(\xi) d\xi - \int_{\nu}^{+\infty} H(\xi) d\xi \stackrel{\text{as}}{\sim} \int_0^{+\infty} H(\xi) d\xi - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)\nu^{n-1}},$$

$$\nu \rightarrow \infty.$$

Однако в нашем случае функции, стоящие под интегралами (начиная со второго), имеют неинтегрируемые особенности на бесконечности поскольку при  $\xi > 1$

$$\begin{aligned} \xi^n (1 + \xi^4)^{-1/2} &= \xi^{n-2} (\xi^{-4} + 1)^{-1/2} = \\ &= \xi^{n-2} \left( 1 - \frac{1}{2} \xi^{-4} + \frac{3}{8} \xi^{-8} - \frac{5}{16} \xi^{-12} + \dots \right) = \\ &= \xi^{n-2} - \frac{1}{2} \xi^{n-6} + \frac{3}{8} \xi^{n-10} - \frac{5}{16} \xi^{n-14} + \dots, \end{aligned}$$

и их снова надо убирать.

В первом интеграле особенностей нет, поэтому

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1} \int_0^{\mu/\varepsilon} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4+1}} &= \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4+1}} - \varepsilon^{-1} \int_{\mu/\varepsilon}^{+\infty} (\xi^{-2} + O(\xi^{-6})) d\xi = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4+1}} - \frac{1}{\mu} + O(\varepsilon^{15/7}) = \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4+1}} - \frac{1}{\mu} + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Во втором интеграле

$$\xi(1+\xi^4)^{-1/2} = \xi^{-1} + O(\xi^{-5}) \quad \text{при } \xi \rightarrow +\infty.$$

Но первое слагаемое, кроме неинтегрируемой особенности при  $\xi = \infty$ , имеет и неинтегрируемую особенность в нуле, поэтому, обозначив

$$\psi_1(\xi) \equiv \xi(1+\xi^4)^{-1/2} - \xi^{-1}, \quad (30.8)$$

получим

$$\begin{aligned}\int_0^{\mu/\varepsilon} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^4+1}} &= \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4+1}} + \int_1^{+\infty} \psi_1(\xi) d\xi - \int_1^{\mu/\varepsilon} O(\xi^{-5}) d\xi + \int_1^{\mu/\varepsilon} \frac{d\xi}{\xi} = \\ &= \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4+1}} + \int_1^{+\infty} \psi_1(\xi) d\xi + \ln \mu - \ln \varepsilon + O(\varepsilon^{12/7}).\end{aligned}$$

Аналогично, в третьем слагаемом

$$\xi^2(1+\xi^4)^{-1/2} = 1 + O(\xi^{-4}) \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty,$$

поэтому, обозначив

$$\psi_2(\xi) \equiv \xi^2(1+\xi^4)^{-1/2} - 1, \quad (30.9)$$

получим

$$\begin{aligned}\varepsilon \int_0^{\mu/\varepsilon} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^4+1}} &= \varepsilon \int_0^{\mu/\varepsilon} \psi_2(\xi) d\xi + \varepsilon \int_0^{\mu/\varepsilon} d\xi = \varepsilon \int_0^{+\infty} \psi_2(\xi) d\xi - \\ &- \varepsilon \int_0^{\mu/\varepsilon} O(\xi^{-4}) d\xi + \mu = \varepsilon \int_0^{+\infty} \psi_3(\xi) d\xi + \mu + O(\varepsilon^{9/7}).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 I_1(\varepsilon, \mu) &= \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}} - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}} + \int_1^{+\infty} \psi_1(\xi) d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + \ln \mu - \ln \varepsilon \right) + \frac{3}{8} \left( \varepsilon \int_0^{+\infty} \psi_2(\xi) d\xi + \mu \right) + o(\varepsilon) = \\
 &= \varepsilon^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}} - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \psi_1(\xi) d\xi + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \ln \mu - \frac{1}{2} \ln \varepsilon + \frac{3}{8} \varepsilon \int_0^{+\infty} \psi_2(\xi) d\xi + \frac{3}{8} \mu + o(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Собирая вместе выражения для  $I_1(\varepsilon, \mu)$  и  $I_2(\varepsilon, \mu)$  (см. (30.7)) с учетом обозначений (30.6), (30.8) и (30.9), окончательно получаем, что

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} dx &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}} - \frac{1}{2} \ln \varepsilon + \\
 &+ \int_0^1 \left( \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} \right) dx - 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}} + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\xi(1 + \xi^4)^{-1/2} - \xi^{-1}) d\xi + \frac{3}{8} \varepsilon \int_0^{+\infty} (\xi^2(1 + \xi^4)^{-1/2} - 1) d\xi + \\
 &+ o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Теперь уже понятно, как получить полное асимптотическое разложение  $I(\varepsilon)$  — надо слагаемые из внешнего разложения регуляризовать в нуле, а из внутреннего — на бесконечности. После интегрирования будут получаться слагаемые вида (с точностью до некоторых числовых коэффициентов)  $\varepsilon^a \mu^b$ ,  $\varepsilon^a \mu^b \ln \varepsilon$  и  $\varepsilon^a \mu^b \ln \mu$ . При этом гарантировано, что асимптотическое разложение получится по следующей асимптотической последовательности:  $\{\varepsilon^{n/7}\}_{n=7}^{+\infty} \cup \{\varepsilon^{4m/7} \ln \varepsilon\}_0^{+\infty}$ .

Однако отсутствие дробных степеней  $\varepsilon$  в рассмотренной части разложения функции  $f(\varepsilon)$  наводит на мысль, что их не будет и в полном асимптотическом разложении этой функции. Эта гипотеза вполне разумна, поскольку аналогичные выкладки с подобными оценками мы могли проделать при всех  $\mu$ , близких к  $4/7$ . Тем самым разложения

$I_1(\varepsilon, \mu)$  и  $I_2(\varepsilon, \mu)$  получились бы функциями от параметра  $\mu$ , однако их сумма от этого параметра не зависит.

Действительно, можно проследить, что в рассмотренном примере при получении асимптотических представлений с большей точностью, все слагаемые, содержащие  $\mu$ , взаимно уничтожаются. В итоге мы получим асимптотическое разложение функции  $f(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  по следующей асимптотической последовательности:  $\{\varepsilon^n\}_{-1}^{+\infty} \cup \{\varepsilon^{4m} \ln \varepsilon\}_0^{+\infty}$ .

В общем случае справедлива следующая

**Теорема 30.1.** Пусть

$$F(\varepsilon, \mu) = \sum_{s=1}^k \alpha_s \varepsilon^{a_s} \mu^{b_s} \ln^{c_s} \varepsilon \ln^{d_s} \mu,$$

где  $c_s, d_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , а  $b_s^2 + d_s^2 \neq 0$  при всех  $s$ .

Если  $f(\varepsilon)$  такова, что

$$f(\varepsilon) = F(\varepsilon, \mu(\varepsilon)) + O(\varepsilon^\alpha), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

для всех  $\mu(\varepsilon) \in (\varepsilon^{p_2}, \varepsilon^{p_1})$ ,  $0 < p_1 < p_2$ , то

$$f(\varepsilon) = O(\varepsilon^\alpha), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Эта теорема говорит о том, что если в процессе нахождения коэффициентов разложения функции  $f(\varepsilon)$  при помощи вспомогательного параметра  $\mu$  получаются слагаемые указанного вида, то можно не следить за слагаемыми, содержащими  $\mu$ .

**Доказательство теоремы 30.1.** Разобьем множество функций  $\alpha_s \varepsilon^{a_s} \mu^{b_s} \ln^{c_s} \varepsilon \ln^{d_s} \mu$  на классы с одинаковыми наборами  $(a_s, b_s)$ . Через  $(\tilde{a}_q, \tilde{b}_q)$  обозначим общий набор  $q$ -го класса, а через  $\varphi_q(\varepsilon, \mu)$  — сумму всех функций  $q$ -го класса ( $q = 1, \dots, \tilde{k} \leq k$ ).

Тогда  $\varphi_q(\varepsilon, \varepsilon^p) = O^*(\varepsilon^{\tilde{a}_q + \tilde{b}_q p})$ . Здесь запись  $\psi(\varepsilon) = O^*(\varepsilon^\alpha)$  означает, что

$$\forall \beta < \alpha \psi(\varepsilon) = o(\varepsilon^\beta) \quad \text{и} \quad \forall \beta > \alpha, \quad \varepsilon^\beta = o(\psi(\varepsilon)).$$

Поскольку число различных наборов  $(\tilde{a}_q, \tilde{b}_q)$  конечно, то найдутся такие  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in (p_1; p_2)$ , что все числа  $\tilde{a}_1 + \tilde{b}_1 \tilde{p}_1, \dots, \tilde{a}_{\tilde{k}} + \tilde{b}_{\tilde{k}} \tilde{p}_1, \tilde{a}_1 + \tilde{b}_1 \tilde{p}_2, \dots, \tilde{a}_{\tilde{k}} + \tilde{b}_{\tilde{k}} \tilde{p}_2$  попарно различны. Тогда, поскольку

$$f(\varepsilon) = \sum_{q=1}^{\tilde{k}} \varphi_q(\varepsilon, \varepsilon^{\tilde{p}_i}) + O(\varepsilon^\alpha), \quad i = 1, 2, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (30.10)$$

$$\sum_{q=1}^{\tilde{k}} \varphi_q(\varepsilon, \varepsilon^{\tilde{p}_1}) - \sum_{q=1}^{\tilde{k}} \varphi_q(\varepsilon, \varepsilon^{\tilde{p}_2}) = O(\varepsilon^\alpha), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (30.11)$$

Поэтому  $\varphi_q(\varepsilon, \varepsilon^{\tilde{p}_1}) = O(\varepsilon^\alpha) \forall q = 1, \dots, \tilde{k}$ , поскольку слагаемые в правой части равенства (30.11) имеют попарно различный точный порядок малости. Это, в свою очередь, в силу равенства (30.10) дает  $f(\varepsilon) = O(\varepsilon^\alpha)$ . ▼

Отметим, что описанный прием заведомо применим для интегралов вида

$$\int_a^b f(x)g(x/\varepsilon) dx,$$

где  $0 \in [a; b]$ ,  $f(x) \in C^\infty[a; b]$ ,  $g(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$  и  $g(\xi)$  имеет степенное асимптотическое разложение при  $\xi \rightarrow \infty$ .

**III.** Третий пример относится к асимптотике двойного интеграла. Если при  $\varepsilon = 0$  подынтегральная функция имеет лишь одну особую точку простого вида, то получение асимптотики интеграла не очень сильно отличается от одномерного случая. А если особыми являются одномерные многообразия, то вычисление асимптотики значительно усложняется.

Рассмотрим интеграл  $I(\varepsilon) \equiv \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y)}{xy + \varepsilon^2} dx dy$ , у которого особыми являются два пересекающихся отрезка:  $x = 0, 0 \leq y \leq 1$  и  $y = 0, 0 \leq x \leq 1$ .

Введем обозначение оператора  $\mathcal{B}$  следующим образом:

$$\mathcal{B}(f) \equiv \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y)}{xy + \varepsilon^2} dx dy.$$

Предполагая функцию  $f(x, y)$  непрерывно дифференцируемой достаточно число раз и используя формулу Тейлора, получим

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(0, 0) + (f(x, 0) - f(0, 0)) + (f(0, y) - f(0, 0)) + \\ & + (f(x, y) + f(0, 0) - f(x, 0) - f(0, y)). \end{aligned} \quad (30.12)$$

Обозначим

$$\varphi_1(x) \equiv f(x, 0) - f(0, 0) = O(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\varphi_2(y) \equiv f(0, y) - f(0, 0) = O(y), \quad y \rightarrow 0,$$

$$\rho(x, y) \equiv f(x, y) + f(0, 0) - f(x, 0) - f(0, y) = O(xy), \quad xy \rightarrow 0.$$

Тем самым функция  $f(x, y)$  представима в виде суммы константы и слагаемых вида  $\varphi(x) = O(x)$ , либо  $\varphi(y) = O(y)$ , либо  $\varphi(x, y) = O(xy)$ . Осталось вычислить асимптотику интегралов  $\mathcal{B}(g)$ , где  $g(x, y)$  — только функции указанного выше вида.

Найдем асимптотику таких интегралов с точностью  $O(\varepsilon^2 \ln^2 \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} B(1) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{xy + \varepsilon^2} dx dy = \int_0^1 \frac{\ln(y + \varepsilon^2) - \ln(\varepsilon^2)}{y} dy = \int_0^{\varepsilon^{-2}} \frac{\ln(1+z)}{z} dz = \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+z)}{z} dz + \int_1^{\varepsilon^{-2}} \frac{\ln(1+z) - \ln z}{z} dz + \int_1^{\varepsilon^{-2}} \frac{\ln z}{z} dz = \int_0^1 \frac{\ln(1+z)}{z} dz + \\ &+ \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+z) - \ln z}{z} dz + \int_1^{\varepsilon^{-2}} \frac{\ln z}{z} dz - \int_{\varepsilon^{-2}}^{\infty} \frac{\ln(1+z) - \ln z}{z} dz = \\ &= A + \frac{1}{2} [\ln(\varepsilon^{-2})]^2 + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$B(1) = A + 2 \ln^2 \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где

$$A = \int_0^1 \frac{\ln(1+z)}{z} dz + \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+z^{-1})}{z} dz.$$

Если  $\varphi(y) = O(y)$ , то

$$\begin{aligned} B(\varphi(x)) &= B(\varphi(y)) = \int_0^1 \left( \frac{\varphi(y)}{y} \ln(xy + \varepsilon^2) \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy = \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi(y)}{y} \ln \left( \frac{y + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right) dy = \int_0^1 \frac{\varphi(y)}{y} \ln \left( \frac{y}{\varepsilon^2} \right) dy + \int_0^1 \frac{\varphi(y)}{y} \ln \left( \frac{y + \varepsilon^2}{y} \right) dy. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{\varphi(y)}{y} \ln \left( \frac{y + \varepsilon^2}{y} \right) dy \right| &\leq M \int_0^1 \ln \left( \frac{y + \varepsilon^2}{y} \right) dy = \\ &= M \left( \ln(1 + \varepsilon^2) + \varepsilon^2 \ln(1 + \varepsilon^2) - \varepsilon^2 \ln(\varepsilon^2) \right) = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Снова применяя интегрирование по частям и смену порядков интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\varphi(y)}{y} \ln \left( \frac{y}{\varepsilon^2} \right) dy &= \left( \ln \left( \frac{y}{\varepsilon^2} \right) \int_0^y \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi = \\ &= \ln(\varepsilon^{-2}) \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi + \int_0^1 \frac{\varphi(\xi) \ln \xi}{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $\varphi(y) = O(y)$ , то

$$B(\varphi(x)) = B(\varphi(y)) = -2 \ln \varepsilon \int_0^1 \frac{\varphi(y)}{y} dy + \int_0^1 \frac{\varphi(y) \ln y}{y} dy + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon),$$

$\varepsilon \rightarrow 0.$

Если  $\rho(x, y) = O(xy)$ , то

$$\begin{aligned} B(\rho(x, y)) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(x, y)}{xy} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{xy + \varepsilon^2} \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(x, y)}{xy} dx dy + \\ &+ O(B(\varepsilon^2)) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(x, y)}{xy} dx dy + O(\varepsilon^2 \ln^2 \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Так как

$$B(f(x, y)) = B(f(0, 0)) + B(\varphi_1(x)) + B(\varphi_2(y)) + B(\rho(x, y)),$$

то окончательный ответ (с учетом (30.12)) следующий:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y)}{xy + \varepsilon^2} dx dy &= f(0, 0) \left[ \int_0^1 \frac{\ln(1+z)}{z} dz + \int_1^\infty \frac{\ln(1+z^{-1})}{z} dz + 2 \ln^2 \varepsilon \right] - \\ &- 2 \ln \varepsilon \left( \int_0^1 \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} dx + \int_0^1 \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} dy \right) + \\ &+ \int_0^1 \frac{(f(x, 0) - f(0, 0)) \ln x}{x} dx + \int_0^1 \frac{(f(0, y) - f(0, 0)) \ln y}{y} dy + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y) + f(0, 0) - f(x, 0) - f(0, y)}{xy} dx dy + O(\varepsilon^2 \ln^2 \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

(30.13)



Поскольку при  $\varphi(y) = O(y)$

$$B(\varphi(x)) = B(\varphi(y)) = \int_0^1 \frac{\varphi(y)}{y} \ln \left( \frac{y + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right) dy,$$

то методами, описанными в предыдущих примерах, можно получить асимптотику этого интеграла с точностью до любой степени малого параметра  $\varepsilon$ . Если же  $\rho(x, y) = O(xy)$ , то

$$B(\rho(x, y)) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(x, y)}{xy} dx dy - \varepsilon^2 B(\rho_1(x, y)), \quad (30.14)$$

где  $\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{xy}$ . Поэтому для нахождения асимптотики  $B(\rho_1(x, y))$  можно снова применить формулу (30.13), выразив входящие в нее функции через исходную, например:

$$\rho_1(, 0) = f'_{xy}(0, 0), \quad \rho_1(x, 0) = \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x},$$

■

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) - \rho_1(x, 0) &= \\ &= \frac{f(x, y) + f(0, 0) - f(x, 0) - f(0, y) - y f'_y(x, 0) + y f'_y(0, 0)}{xy}. \end{aligned}$$

Таким образом, формулы (30.14) и (30.13) позволяют получить асимптотическое представление интеграла  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y)}{xy + \varepsilon^2} dx dy$  с точностью до любой степени малого параметра  $\varepsilon$ .

## Глава 8

# НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

### § 31. Постановка задачи. Построение формальной асимптотики

В этой главе также будет рассмотрено дифференциальное уравнение, сингулярно зависящее от малого параметра  $\varepsilon \ll 1$ . Начальная задача

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, t, \varepsilon), \quad x(0) = A, \quad (31.1)$$

с одной стороны, конечно, проще, чем краевая задача, рассмотренная в предыдущей главе, но ее нелинейный характер порождает дополнительные трудности. Значительно более общая начальная задача для систем дифференциальных уравнений такого типа была исследована А. Н. Тихоновым [15] и его учениками. С продолжением этих исследований можно познакомиться в книге [4]. Здесь будет исследован простейший случай одного уравнения (31.1).

Прежде всего предположим существование предельного решения уравнения, т. е. выполнение условия

а) существует функция  $x_0(t)$ , определенная при  $0 \leq t \leq a$ , такая что  $f(x_0(t), t, 0) \equiv 0$ .

Предполагается, что функция  $f(x, t, \varepsilon)$  определена на множестве

$$\Omega: \{0 \leq t \leq a, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad |x| \leq B\},$$

бесконечно дифференцируема на этом множестве,  $|x_0(t)| < B$  и  $|A| < B$ . Самое существенное условие, при выполнении которого будет исследована задача (31.1), это так называемое условие устойчивости

б)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \varepsilon) < -\gamma < 0$  на множестве  $\Omega$ .

Из условия (б) следует, что  $x_0(t) \in C^\infty[0; a]$ . Начнем построение асимптотики с внешнего асимптотического разложения, которое бу-

дем искать в виде простейшего ряда:

$$U(t, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (31.2)$$

Коэффициенты ряда получаются, как всегда, подстановкой его в уравнение и приравниванием членов при одинаковых степенях малого параметра. Главный член — это функция  $x_0(t)$ , упомянутая в условии (а).

Для того чтобы избежать излишней громоздкости, все дальнейшие вычисления будем проводить для того случая, когда функция  $f(x, t, \varepsilon)$  не зависит от  $\varepsilon$ . Исследование задачи (31.1) в общем случае практически ничем не отличается от случая, в котором  $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \equiv 0$ .

Итак, будем рассматривать уравнение:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (31.3)$$

с начальным условием

$$x(0) = A. \quad (31.4)$$

Для получения коэффициентов ряда (31.2) надо разложить функцию  $f(x, t)$  в ряд Тейлора в точке  $P_0 = (x_0(t), t)$  по переменной  $x$  при фиксированном  $t$ . В результате получаем рекуррентную систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)x_1(t) &= \frac{dx_0}{dt}, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)x_2(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)x_1^2(t) &= \frac{dx_1}{dt}, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)x_3(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(P_0)x_1^3(t) &= \frac{dx_2}{dt}, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)x_4(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)x_1(t)x_3(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)x_2^2(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(P_0)x_1^2(t)x_2(t) + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(P_0)x_1^4(t) = \frac{dx_3}{dt}, \\ \dots \end{aligned} \right. \quad (31.5)$$

Из этой системы в силу условий (а) и (б) последовательно определяют все  $x_k(t)$ , так что  $x_k(t) \in C^\infty[0; a]$ .

Ясно, что построенный ряд (31.2) является асимптотическим решением уравнения (31.3). Действительно, обозначим

$$r_N(t) = \sum_{k=1}^N \varepsilon^k x_k(t), \quad \hat{x}_N(t) = x_0(t) + r_N(t)$$

и рассмотрим выражение  $Z_N = \varepsilon \frac{d\hat{x}_N(t)}{dt} - f(\hat{x}_N(t), t)$ .

Функцию  $f(\hat{x}_N(t), t) = f(x_0(t) + r_N(t), t)$  разложим по формуле Тейлора в точке  $P_0 = (x_0(t), t)$  по переменной  $x$  при фиксированном  $t$  с остаточным членом порядка  $O(\varepsilon^{N+1})$  (равномерно по  $t \in [0; a]$ ). В результате в выражении  $Z_N$  обратятся в нуль коэффициенты при всех степенях  $\varepsilon$  с показателями, меньшими чем  $N + 1$  (именно так и были получены уравнения (31.5)). Поэтому

$$\varepsilon \frac{d\hat{x}_N(t)}{dt} = f(\hat{x}_N(t), t) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

это и означает, что ряд (31.2) является асимптотическим решением уравнения (31.3).

Но этот ряд не является асимптотическим решением всей задачи (31.3), (31.4) и, тем более, не может быть равномерным асимптотическим разложением истинного решения на отрезке  $[0; a]$ , так как он даже формально, вообще говоря, не удовлетворяет начальному условию (31.4).

Для того чтобы получить равномерное асимптотическое разложение решения, так же как и в предыдущей главе, рассмотрим функции пограничного слоя в окрестности начальной точки, где наблюдается невязка в начальном условии. Естественное предположение состоит в том, что построенный ряд (31.2) хорошо приближает истинное решение вдали от начальной точки, а в ее окрестности происходит резкое изменение решения и для правильного описания решения надо использовать другую, растянутую независимую переменную. Из простых соображений, таких же как и в гл. 7, следует, что новая, внутренняя переменная — это  $\tau = \varepsilon^{-1}t$ .

Асимптотику решения будем искать в виде суммы внешнего разложения, т. е. ряда (31.2), и внутреннего разложения — ряда

$$V(\tau, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(\tau), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (31.6)$$

Для нахождения коэффициентов  $y_k(\tau)$  подставим  $U(t, \varepsilon) + V(\varepsilon^{-1}t, \varepsilon)$  в уравнение (31.3) и учтем, что по построению формально выполнено равенство

$$\varepsilon \frac{dU(t, \varepsilon)}{dt} = f(U(t, \varepsilon), t).$$

Следовательно, предстоит добиться выполнения формального равенства

$$f(U(t, \varepsilon), t) + \varepsilon \frac{dV(\varepsilon^{-1}t, \varepsilon)}{dt} = f(U(t, \varepsilon) + V(\varepsilon^{-1}t, \varepsilon), t),$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{dy_k(\tau)}{d\tau} = f\left(x_0(\varepsilon\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\varepsilon\tau) + y_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k(\tau), \varepsilon\tau\right) - f\left(x_0(\varepsilon\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau\right). \quad (31.7)$$

В правой части этого равенства следует заменить функции  $x_k(\varepsilon\tau)$  их рядами Тейлора в точке 0:

$$x_k(\varepsilon\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} \varepsilon^j \tau^j.$$

Затем надо разложить функции  $f$  в точках  $x_0(0) + y_0(\tau) = c_{0,0} + y_0(\tau)$  и  $c_{0,0}$  соответственно и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . В результате получается система дифференциальных уравнений. Первые два уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{d\tau} = f(c_{0,0} + y_0(\tau), 0) - f(c_{0,0}, 0), \\ \frac{dy_1}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x}(c_{0,0} + y_0(\tau), 0) y_1(\tau) + \\ + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(c_{0,0} + y_0(\tau), 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_{0,0}, 0) \right) (c_{0,1}\tau + c_{1,0}) + \\ + \left( \frac{\partial f}{\partial t}(c_{0,0} + y_0(\tau), 0) - \frac{\partial f}{\partial t}(c_{0,0}, 0) \right) \tau. \end{cases} \quad (31.8)$$

Для компактной записи остальных уравнений разумно ввести обозначения:

$$B(\tau) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(0) + y_0(\tau), 0), \quad A_{k,j}(\tau) = \frac{1}{k!j!} \frac{\partial^{k+j} f}{\partial x^k \partial t^j}(x_0(0) + y_0(\tau), 0), \\ B_{k,j}(\tau) = \frac{1}{k!j!} \left( \frac{\partial^{k+j} f}{\partial x^k \partial t^j}(c_{0,0} + y_0(\tau), 0) - \frac{\partial^{k+j} f}{\partial x^k \partial t^j}(c_{0,0}, 0) \right).$$

Остальные уравнения системы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{d\tau} = B(\tau)y_2(\tau) + B_{1,0}(\tau)(c_{0,2}\tau^2 + c_{1,1}\tau + c_{2,0}) + \\ + A_{2,0}(\tau)[y_1^2(\tau) + 2y_1(\tau)(c_{0,1}\tau + c_{1,0})] + A_{1,1}(\tau)y_1(\tau)\tau + \\ + B_{2,0}(\tau)(c_{0,1}\tau + c_{1,0})^2 + B_{1,1}(\tau)(c_{0,1}\tau + c_{1,0}) + B_{0,2}(\tau)\tau^2, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_k}{d\tau} = B(\tau)y_k(\tau) + G_k(\tau), \end{cases} \quad (31.9)$$

где функция  $G_k(\tau)$  — это сумма произведений разных полиномов от  $\tau$  на гладкие ограниченные функции и на различные степени  $y_i(\tau)$  при  $i < k$ .

Обратимся к уравнению для  $y_0(\tau)$ . Начальное условие для  $y_0(\tau)$  должно компенсировать невязку, возникшую во внешнем разложении, так что  $y_0(0) = A - x_0(0)$ . В силу формулы конечных приращений Лагранжа

$$\frac{dy_0}{d\tau} = f(c_{0,0} + y_0(\tau), 0) - f(c_{0,0}, 0) = f'_x(c_{0,0} + \theta(\tau)y_0(\tau), 0) \cdot y_0 \equiv p(\tau) \cdot y_0$$

и  $p(\tau) \leq -\gamma$  при тех  $\tau$ , при которых  $|c_{0,0} + y_0(\tau)| < B$ , что справедливо по крайней мере при малых  $\tau$ , поскольку

$$|c_{0,0} + y_0(0)| = |c_{0,0} + A - x_0(0)| = |A| < B.$$

Таким образом, с учетом начальных условий получим

$$y_0(\tau) = (A - x_0(0)) \exp\left(\int_0^\tau p(\eta) d\eta\right) \equiv (A - x_0(0)) \exp(\beta(\tau)), \quad (31.10)$$

где

$$\beta(\tau) = \int_0^\tau p(\eta) d\eta \leq -\gamma\tau. \quad (31.11)$$

В силу (31.10) имеем

$$c_{0,0} + y_0(\tau) = c_{0,0} + (A - x_0(0))e^{\beta(\tau)} = c_{0,0}(1 - e^{\beta(\tau)}) + Ae^{\beta(\tau)}.$$

Поскольку в силу (31.11)  $e^{\beta(\tau)} \in (0; 1)$ , то  $c_{0,0} + y_0(\tau)$ , как выпуклая комбинация  $c_{0,0}$  и  $A$ , лежит на отрезке из интервала  $(-B; B)$ , определяемом точками  $c_{0,0}$  и  $A$ , поэтому  $c_{0,0} + y_0(\tau)$  не может покинуть этот отрезок ни при каких  $\tau$ . Тем самым  $y_0(\tau)$  определено при всех  $\tau$  и экспоненциально убывает:

$$|y_0(\tau)| \leq |A - x_0(0)|e^{-\gamma\tau}. \quad (31.12)$$

Отметим, что  $y_0(\tau)$  можно найти в квадратурах:

$$\tau = \int_{A-x_0(0)}^{y_0} (f(c_{0,0} + \eta, 0) - f(c_{0,0}, 0))^{-1} d\eta.$$

Покажем, что при достаточно малых  $\varepsilon$  точка  $(x_0(t) + y_0(t/\varepsilon), t)$  все время находится в области определения функции  $f(x, t)$ , т. е.  $|x_0(t) + y_0(t/\varepsilon)| \leq B$ .

Действительно, в силу непрерывной дифференцируемости функции  $x_0(t)$  она удовлетворяет неравенству

$$|x_0(t) - x_0(0)| \leq Mt. \quad (31.13)$$

Поэтому с учетом (31.10)

$$x_0(t) + y_0(t/\varepsilon) = x_0(t)(1 - e^{\beta(t/\varepsilon)}) + Ae^{\beta(t/\varepsilon)} + (x_0(t) - x_0(0))e^{\beta(t/\varepsilon)}. \quad (31.14)$$

Но в силу непрерывности  $x_0(t)$  при всех  $t \in [0; a]$  лежит на некотором отрезке из интервала  $(-B, B)$ , поэтому сумма первых двух слагаемых из (31.14), как выпуклая комбинация  $c_{0,0}$  и  $A$ , тоже при всех  $t \in [0; a]$  принадлежит некоторому отрезку из этого интервала. Последнее же слагаемое из (31.14) в силу соотношения

$$|(x_0(t) - x_0(0))e^{\beta(t/\varepsilon)}| \leq Mte^{-(\gamma t)/\varepsilon} = M\varepsilon(t/\varepsilon)e^{-(\gamma t)/\varepsilon} \leq M_1\varepsilon,$$

вытекающего из (31.11), (31.13), равномерно по  $t \in [0; a]$  стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Все остальные уравнения для  $y_k(\tau)$  при  $k > 0$  линейные и имеют вид

$$\frac{dy_k}{d\tau} = B(\tau)y_k(\tau) + G_k(\tau),$$

где функция  $B(\tau)$  строго отрицательна. Начальные условия для  $y_k(\tau)$  при  $k > 0$  должны компенсировать остальные невязки в начальных условиях внешнего асимптотического разложения (31.2):  $y_k(0) = -x_k(0)$ .

Если функции  $y_i(\tau)$  при  $i < k$  экспоненциально стремятся к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ , то функция  $G_k(\tau)$  в правой части уравнения (31.8) тоже экспоненциально стремится к нулю. Следовательно, экспоненциально стремится к нулю и  $y_k(\tau)$  — решение уравнения (31.8). По индукции отсюда вытекает, что существуют все решения системы (31.8), (31.9) и все они экспоненциально стремятся к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ . Построение внутреннего разложения — ряда (31.6) — закончено.

Теперь любая частичная сумма ряда  $U(t, \varepsilon) + V(\tau, \varepsilon)$  удовлетворяет начальному условию (31.4). Осталось показать, что сумма  $U(t, \varepsilon) + V(\tau, \varepsilon)$  является асимптотическим решением уравнения (31.3). Это означает, что при связи  $t = \varepsilon\tau$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \frac{dx_k(t)}{d\tau} + \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \frac{dy_k(\tau)}{d\tau} - f\left(\sum_{k=0}^N \varepsilon^k x_k(t) + \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(\tau), t\right) = \\ = O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned} \quad (31.15)$$

Выше уже пояснялось, что

$$\varepsilon \frac{d\hat{x}_N(t)}{dt} = f(\hat{x}_N(t), t) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

где  $\hat{x}_N(t) = x_0(t) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k x_k(t)$ . Поэтому осталось лишь проверить, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\sum_{k=0}^N \varepsilon^k \frac{dy_k(\tau)}{d\tau} = f\left(\hat{x}_N(\varepsilon\tau) + y_0(\tau) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k y_k(\tau), \varepsilon\tau\right) - f(\hat{x}_N(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) + O(\varepsilon^{N+1}). \quad (31.16)$$

Так как

$$|y_k(\tau)| + \left| \frac{dy_k(\tau)}{d\tau} \right| < M_k \exp(-\gamma\tau), \quad \gamma > 0,$$

то равенство (31.16), очевидно, справедливо при  $t = \varepsilon\tau > \sqrt{\varepsilon}$ , т. е. при  $\tau > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ .

Для того чтобы убедиться в его справедливости при  $t = \varepsilon\tau \leq \sqrt{\varepsilon}$ , надо заметить, что равенство (31.16) почти совпадает с равенством (31.7), которое послужило отправной точкой получения уравнений для  $y_k(\tau)$ . Поэтому следует разложить функции  $f$  в соответствующие ряды Тейлора до порядка  $N+1$ . Вследствие системы уравнений (31.8), (31.9) в равенстве (31.16) пропадут все члены, в которых показатели степеней  $\varepsilon$  не превосходят  $N$ . При этом остаточный член не будет превосходить

$$O(\varepsilon^{N+1} + (\varepsilon\tau)^{N+1}) = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}(N+1)}).$$

То обстоятельство, что в равенстве (31.16) получена оценка  $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}(N+1)})$ , а не  $O(\varepsilon^{(N+1)})$ , не играет никакой роли ввиду произвольности числа  $N$ . Как было замечено еще в § 2 (теорема 2.3), полученная оценка достаточна для доказательства равенства (31.16).

Итак, построенный ряд является асимптотическим решением задачи (31.3), (31.4).

## § 32. Обоснование асимптотического разложения. Система уравнений

**Теорема 32.1.** Пусть для задачи (31.3), (31.4) выполнены условия (а), (б).

Тогда при  $0 \leq t \leq a$  существует решение этой задачи и построенный выше ряд  $U(t, \varepsilon) + V(\varepsilon^{-1}t, \varepsilon)$  (см. (31.2), (31.6)) является его равномерным асимптотическим разложением.



**Доказательство.** Обозначим частичную сумму построенного формального разложения через

$$z_N(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k x_k(t) + \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

По построению при достаточно малом  $\varepsilon$  справедливо неравенство  $|z_N(t, \varepsilon)| < B$ . Следовательно, функция  $f$  определена в точке  $(z_N(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$  при всех  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Кроме того, соотношение (31.15)) означает, что

$$\varepsilon \frac{dz_N}{dt} - f(z_N(t, \varepsilon), t) = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Однако а priori даже не ясно, существует ли решение задачи (31.3), (31.4) на всем отрезке  $[0, a]$ . Из общей теоремы о существовании решения начальной задачи вытекает, что такое решение существует по крайней мере в малой окрестности начальной точки. И это решение можно продолжать во все моменты времени, пока  $|f(x(t, \varepsilon), t)| < B$ .

Дальнейшие оценки будут производиться для тех значений  $t$ , при которых решение задачи (31.3), (31.4) существует. А из полученных оценок уже будет вытекать, что такое решение продолжимо вплоть до  $t = a$ .

Итак, запишем уравнение для разности  $x(t, \varepsilon) - z_N(t, \varepsilon) = w_N(t, \varepsilon)$ :

$$\varepsilon \frac{dw_N}{dt}(t, \varepsilon) = f(x(t, \varepsilon), t) - f(z_N(t, \varepsilon), t) + \rho_N(t, \varepsilon),$$

где  $\rho_N(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ .

По построению  $w_N(0, \varepsilon) = 0$ . Заменяя  $f(x(t, \varepsilon), t) - f(z_N(t, \varepsilon), t)$  на  $\beta_N(t, \varepsilon)w_N(t, \varepsilon)$ , где

$$\beta_N(t, \varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta x(t, \varepsilon) + (1 - \theta)z_N(t, \varepsilon), t), \quad 0 < \theta < 1,$$

получим выражение для  $w_N(t, \varepsilon)$ :

$$w_N(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^t \exp\left(\int_\xi^t \varepsilon^{-1} \beta_N(\eta, \varepsilon) d\eta\right) \rho_N(\xi, \varepsilon) d\xi.$$

Из условия (б) вытекает, что  $\beta_N(t, \varepsilon) < -\gamma < 0$  до тех пор, пока  $|x(t, \varepsilon)| < B$ . Следовательно, для этих значений  $t$

$$|w_N(t, \varepsilon)| < M\varepsilon^N \int_0^t \exp\left(-\int_\xi^t \varepsilon^{-1} \gamma d\eta\right) d\xi < M\gamma^{-1} \varepsilon^{N+1}.$$

Поэтому  $|x(t, \varepsilon)| < |z_N(t, \varepsilon)| + M_1 \varepsilon^{N+1} < B$  при всех достаточно малых  $\varepsilon$ . Значит, на всем промежутке, где решение задачи существует,

выполнено неравенство  $\beta_N(t, \varepsilon) < -\gamma < 0$ , и, следовательно, решение может быть продолжено на весь отрезок  $[0; a]$ .

На этом отрезке  $x(t, \varepsilon) = z_N(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})$ . ▼

Описанная выше методика построения и обоснования асимптотического разложения решения начальной задачи может быть распространена и на исследование системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, z, t), \\ \frac{dz}{dt} = g(x, z, t), \\ x(0, \varepsilon) = A_1, \quad z(0, \varepsilon) = A_2. \end{cases} \quad (32.1)$$

Основное условие устойчивости — неравенство  $\frac{\partial f}{\partial x} < -\gamma < 0$  — снова требуется наложить, для того чтобы асимптотика была аналогична рассмотренной выше. Остальные условия (область определения функций, их гладкость) такие же, как в случае одного уравнения, и мы не будем скрупулезно их перечислять.

Асимптотические разложения можно строить тем же способом. Должно быть выполнено предельное уравнение  $f(x_0(t), z_0(t), t) = 0$ . Естественно предполагается, что из этого уравнения можно определить  $x_0(t)$  как функцию от  $z_0(t)$  и  $t$ . Затем эту функцию  $x_0(t)$  следует подставить во второе уравнение и рассмотреть начальную задачу для получившегося уравнения относительно  $z_0(t)$ . Таким способом определяются главные члены асимптотических разложений решений  $x_0(t)$  и  $z_0(t)$ .

Далее асимптотики строятся в виде суммы внешнего и внутреннего разложений ( $\tau = \varepsilon^{-1}t$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= x_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(\tau), \\ z(t, \varepsilon) &= z_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\tau). \end{aligned}$$

После подстановки этих рядов внешнего разложения,

$$x_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) \quad \text{и} \quad z_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t),$$

в уравнения системы (32.1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  получается простая рекуррентная система дифференциальных уравнений. Отличие от случая одного уравнения состоит лишь в том, что нельзя искать решения этих уравнений независимо от коэффициентов внутреннего разложения.

Система уравнений для функций  $y_k(\tau)$ ,  $v_k(\tau)$  получается так же, как и в случае одного уравнения. Однако требование экспоненциального стремления решений к нулю на бесконечности однозначно определяет для них начальные условия.

Так как  $z_k(0) + v_k(0) = 0$  при  $k > 0$ , то это определяет начальные условия для коэффициентов внешнего разложения.

Обоснование справедливости построенного асимптотического разложения проводится вполне аналогично случаю одного уравнения.

Мало отличается от рассмотренных выше случаев и задача для более общей системы, которая тоже имеет вид (32.1), но  $x(t, \varepsilon)$  и  $z(t, \varepsilon)$  — это уже вектор-функции. Условие устойчивости для этой системы означает отрицательность вещественных частей матрицы  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

Нетрудно заметить, что при положительной производной  $\frac{\partial f}{\partial x}$  даже в случае одного уравнения решение начальной задачи при малых  $\varepsilon$  не продолжается на расстояние порядка больше  $\varepsilon$ , и поэтому нет смысла говорить о его асимптотике.

В том случае, когда производная  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t), t)$  отрицательна для  $t > 0$ , но при этом  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0(0), 0) = 0$ , асимптотика решения имеет весьма сложный характер. Один из таких примеров разобран в [6, гл. II, § 3].

### § 33. Промежуточный пограничный слой

Этот параграф по содержанию примыкает к предыдущему — здесь тоже рассматривается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. Но в этом примере появляется промежуточный неэкспоненциально убывающий пограничный слой и для построения равномерного асимптотического разложения вновь, как и в § 29, требуется провести согласование различных асимптотических разложений.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x, u) \quad (33.1)$$

с начальным условием

$$u(0, \varepsilon) = R_0, \quad (33.2)$$

где  $x \in [0; d]$ ,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр,  $R_0$  — положительная постоянная.

Пусть  $f(x, u)$  — бесконечно дифференцируемая функция для  $x \in [0; d]$  и всех значений  $u$  и такая, что

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, 0) = -2, \quad (33.3)$$

$$f(x, 0) > 0 \quad \text{при } x > 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, u) < \text{const} < 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq d, \quad u \geq 0. \quad (33.4)$$

Смысл всех этих условий довольно прост: из (33.3) вытекает, что вблизи начала координат

$$f(x, u) = x - u^2 + O(x^2 + |xu| + |u^3|),$$

а условия (33.4) — это достаточные условия существования и единственности неотрицательной функции  $u_0(x)$ , такой что

$$f(x, u_0(x)) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x)) < 0 \quad \text{при } x > 0.$$

Естественно ожидать, что именно функция  $u_0(x)$  является пределом решения задачи (33.1), (33.2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если, конечно, такое решение  $u_\varepsilon(x)$  существует.

Доказательство существования решения  $u_\varepsilon(x)$  будет дано немного позднее, вместе с выяснением его асимптотики, а пока что формально выпишем внешнее разложение решения  $u_\varepsilon(x)$  в том же виде, что и в предыдущих параграфах:

$$U \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x). \quad (33.5)$$

Подставим этот ряд в уравнение (33.1), разложим функцию  $f(x, U)$  в ряд Тейлора в точке  $(x, u_0(x))$  и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , в результате получим рекуррентную систему уравнений

$$f(x, u_0(x)) = 0, \quad (33.6)$$

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x))u_1,$$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x))u_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, u_0(x))u_1^2,$$

$$\dots \dots \dots \quad (33.7)$$

$$\frac{du_{k-1}}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x))u_k + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial u^j}(x, u_0(x)) \sum_{p_1+\dots+p_j=k} \prod_{i=1}^j u_{p_i},$$

$$k \geq 2, \quad p_i > 0.$$

Из условий (33.4) вытекает, как уже было отмечено выше, существование функции  $u_0(x)$  — решения уравнения (33.6). Из этих же условий и из условий (33.3) следует, что  $u_0(0) = 0$ ,  $u_0(x) > 0$  при  $x > 0$  и  $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x)) < 0$  при  $x > 0$ . Значит,  $u_0(x) \in C^\infty(0, d]$ , а из

уравнений (33.7) последовательно определяются  $u_k(x) \in C^\infty(0, d]$  при  $k \geq 1$ . Тем самым все коэффициенты внешнего разложения (33.5) определены.

**Теорема 33.1.** Для функции  $u_0(x)$  справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$u_0(x) \stackrel{\text{as}}{=} \sqrt{x} + \sum_{j=2}^{\infty} a_{j,0} x^{j/2}, \quad x \rightarrow 0, \quad (33.8)$$

и это соотношение допускает почленное дифференцирование любого порядка.

**Доказательство.** Сделаем замену неизвестной функции и независимой переменной:  $u_0(x) \equiv yw(y)$ ,  $y = \sqrt{x}$ . Тогда уравнение для  $u_0(x)$  эквивалентно уравнению  $y^{-2}f(y^2, yw(y)) = 0$ . Обозначим левую часть этого равенства через  $F(y, w(y))$ . Из рассмотрения ряда Тейлора для  $f(x, u)$  заключаем, что  $F(y, w(y))$  — бесконечно дифференцируемая функция при  $w \in \mathbb{R}$ ,  $y \in [0; \sqrt{d}]$ . Кроме того,  $F(0, 1) = 0$  и  $\frac{\partial F}{\partial w}(0, 1) = -2$ . Отсюда по теореме о неявной функции следует, что функция  $w(y) \in C^\infty[0; \sqrt{d}]$ . Переходя снова к переменным  $x$ ,  $u_0(x)$ , приходим к разложению (33.8). ▀

Сейчас исходя из (33.8) выясним асимптотическое поведение всех остальных коэффициентов при  $x \rightarrow 0$ .

Будем посредством  $s_j(x)$  обозначать асимптотические ряды вида  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i/2}$ ,  $x \rightarrow 0$ , опуская индексы у  $s_j$  там, где это не приводит к недоразумениям.

Разлагая функцию  $f(x, u)$  в ряд Тейлора в нуле и используя (33.3), (33.8), получаем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x)) &= -2\sqrt{x} + xs(x), \quad x \rightarrow 0, \\ \frac{\partial f^j}{\partial u^j}(x, u_0(x)) &= s_j(x), \quad x \rightarrow 0, \quad j \geq 2. \end{aligned}$$

Из этих равенств, из уравнений (33.7) и из соотношения (33.8) легко по индукции вывести, что

$$u_k(x) \stackrel{\text{as}}{=} x^{(1-3k)/2} s_k(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (33.9)$$

и это равенство допускает многократное почленное дифференцирование. Таким образом, коэффициенты  $u_k(x)$  имеют нарастающие особенности при  $x \rightarrow 0$ , т.е. задача (33.1), (33.2) бисингулярна.

В соответствии с общим принципом приступаем к построению внутреннего разложения в окрестности точки  $x = 0$ . Так как вблизи этой точки решение  $u_\varepsilon(x) \approx R_0 > 0$ , то естественной является замена пере-

менной  $x = \varepsilon \xi$ , после которой левая и правая части уравнения (33.1) имеют один и тот же порядок.

Обозначим  $v_\varepsilon(\xi) \equiv u_\varepsilon(\varepsilon \xi)$  и выпишем уравнение для  $v_\varepsilon$ :

$$\frac{dv_\varepsilon}{d\xi} = f(\varepsilon \xi, v_\varepsilon). \quad (33.10)$$

Внутреннее разложение имеет вид

$$V \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (33.11)$$

Система уравнений для  $v_i(\xi)$  получается обычным способом, после того как функция  $f(\varepsilon \xi, v_\varepsilon)$  в уравнении (33.10) будет разложена в ряд по степеням:

$$\frac{dv_0}{d\xi} = f(0, v_0), \quad (33.12)$$

$$\frac{dv_1}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial u}(0, v_0) v_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(0, v_0) \xi, \quad (33.13)$$

$$\frac{dv_i}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial u}(0, v_0) v_i + r_i(\xi), \quad (33.14)$$

где

$$r_i(\xi) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(0, v_0) \xi^i + \sum_{\substack{2 \leq q+m \leq i \\ m \geq 1}} \frac{1}{q! m!} \frac{\partial^{q+m} f}{\partial x^q \partial u^m}(0, v_0) \xi^q \times \\ \times \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_m = i - q \\ p_i > 0}} \prod_{l=1}^m v_{p_l}, \quad i \geq 2. \quad (33.15)$$

Начальные данные также, очевидно, следуют из (33.2):

$$v_0(0) = R_0, \quad v_k(0) = 0 \quad \text{при } k > 0. \quad (33.16)$$

Решение уравнения (33.12) с начальным условием (33.16) записывается в квадратурах:

$$\xi = \int_{R_0}^{v_0} \frac{dv}{f(0, v)}. \quad (33.17)$$

Так как из условий (33.3), (33.4) вытекает, что  $f(0, v) < 0$  при  $0 < v \leq R_0$ , то соотношение (33.17) определяет положительную монотонно убывающую функцию  $v_0(\xi)$  при  $\xi \geq 0$ . Из условия  $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = 0$  следует, что функция  $v_0(\xi)$  определена при всех  $\xi \geq 0$  и  $v_0(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ .

Теперь предстоит найти асимптотику  $v_0(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . Посредством  $P_j$  или  $P_{j,k}$  будем обозначать полиномы степени  $j$ .

**Теорема 33.2.** Для функции  $v_0(\xi)$  справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$v_0(\xi) \stackrel{\text{as}}{=} \xi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \xi^{-j} P_{j,0}(\ln \xi), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad P_{0,0} = 1. \quad (33.18)$$

**Доказательство.** Обозначим  $\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}(0,0) = 6\gamma$ . Тогда для любого натурального  $N$

$$f(0, v) = -v^2 + \gamma v^3 + \sum_{k=4}^{N+4} c_k v^k + O(v^{N+5}), \quad v \rightarrow 0. \quad (33.19)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{f(0, v_0)} = -\frac{1}{v_0^2} - \frac{\gamma}{v_0} + \sum_{k=0}^N \bar{c}_k v_0^k + O(v_0^{N+1}), \quad v_0 \rightarrow 0.$$

Подставляя это выражение в (33.17), приходим к равенству

$$\xi = \frac{1}{v_0} - \gamma \ln v_0 + \sum_{k=0}^{N+1} d_k v_0^k + O(v_0^{N+2}), \quad v_0 \rightarrow 0. \quad (33.20)$$

Отсюда вытекает, что  $v_0(\xi) = O(\xi^{-1})$  и  $[v_0(\xi)]^{-1} = O(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$ .

Следовательно,

$$\ln v_0(\xi) = O(\ln \xi),$$

$$\begin{aligned} v_0(\xi) &= \frac{1}{\xi} \left( 1 + \frac{\gamma \ln v_0}{\xi} - \sum_{k=0}^{N+1} d_k \frac{v_0^k}{\xi} + O\left(\frac{v_0^{N+2}}{\xi}\right) \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\xi} - \frac{\gamma \ln v_0}{\xi^2} + \frac{d_0}{\xi^2} + O\left(\frac{\ln^2 v_0}{\xi^3}\right), \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (33.21)$$

Теперь можно применить метод итерации: из (33.21) заключаем, что

$$v_0(\xi) = \xi^{-1} + O(\xi^{-2} \ln \xi), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Подставляя это значение в правую часть равенства (33.21), получаем, что

$$\begin{aligned} v_0(\xi) &= \frac{1}{\xi} - \frac{\gamma}{\xi^2} \ln \left( \frac{1}{\xi} - \frac{\gamma \ln v_0}{\xi^2} + \frac{d_0}{\xi^2} + O\left(\frac{\ln^2 \xi}{\xi^3}\right) \right) + \frac{d_0}{\xi^2} + O\left(\frac{\ln^2 \xi}{\xi^3}\right) = \\ &= \xi^{-1} + \gamma \xi^{-2} \ln \xi + d_0 \xi^{-2} + O(\xi^{-3} \ln^2 \xi), \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (33.22)$$

Далее можно снова подставить это выражение  $v_0(\xi)$  в правую часть равенства (33.21) и учесть следующий член разложения:

$$\begin{aligned} \ln v_0(\xi) &= \ln(\xi^{-1} + \gamma \xi^{-2} \ln \xi + d_0 \xi^{-2} + O(\xi^{-3} \ln^2 \xi)) = \\ &= -\ln \xi + \xi^{-1} \gamma \ln \xi + \xi^{-1} d_0 + O(\xi^{-2} \ln^2 \xi), \quad \xi \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (33.23)$$

$$\begin{aligned} v_0(\xi) &= \frac{1}{\xi} \left( 1 + \frac{\gamma \ln v_0}{\xi} - \frac{d_0}{\xi} - \frac{d_1 v_0}{\xi} + O\left(\frac{v_0^2}{\xi}\right) \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\xi} - \frac{\gamma \ln v_0}{\xi^2} + \frac{d_0}{\xi^2} + \frac{d_1 v_0}{\xi^2} + \frac{\gamma^2 \ln^2 v_0}{\xi^3} - \frac{2\gamma d_0 \ln v_0}{\xi^3} + \frac{d_0^2}{\xi^3} + \\ &\quad + O\left(\frac{\ln^3 \xi}{\xi^4}\right), \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теперь в правую часть полученного выражения вместо  $v_0$  и  $\ln v_0$  следует подставить их значения по формулам (33.22) и (33.23):

$$\begin{aligned} v_0(\xi) &= \frac{1}{\xi} - \frac{\gamma}{\xi^2} \ln \left( \frac{1}{\xi} \left( 1 + \frac{\gamma \ln \xi}{\xi} + \frac{d_0}{\xi} + O(\xi^{-2} \ln^2 \xi) \right) \right) + \\ &\quad + \frac{d_0}{\xi^2} + \frac{d_1}{\xi^2} \left( \frac{1}{\xi} + \frac{\gamma \ln \xi}{\xi^2} + \frac{d_0}{\xi^2} + O(\xi^{-3} \ln^2 \xi) \right) + \frac{\gamma^2 \ln^2 \xi}{\xi^3} + \frac{2\gamma d_0 \ln \xi}{\xi^3} + \\ &\quad + \frac{d_0^2}{\xi^3} + O\left(\frac{\ln^3 \xi}{\xi^4}\right) = \frac{1}{\xi} + \frac{\gamma \ln \xi}{\xi^2} + \frac{d_0}{\xi^2} + \frac{\gamma^2 \ln^2 \xi}{\xi^3} + \frac{\tilde{d}_0 \ln \xi}{\xi^3} + \frac{\tilde{d}_1}{\xi^3} + \\ &\quad + O\left(\frac{\ln^3 \xi}{\xi^4}\right), \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Продолжая далее по индукции этот процесс последовательных асимптотических приближений, можно убедиться в справедливости соотношения (33.18). ▼

Из явных формул видно, что при  $\gamma \neq 0$  в асимптотическом разложении присутствует бесконечно много членов, содержащих степени  $\ln \xi$ .

Существование решений уравнений (33.13), удовлетворяющих условиям (33.16), очевидно. Для каждой из функций  $v_i$  уравнение (33.13) — это линейное уравнение, при условии что определены  $v_j$  при  $j < i$ . Таким образом,  $v_i(\xi) \in C^\infty[0; \infty)$ , решение записывается в квадратурах и из явного вида можно получить асимптотику функций  $v_i(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$ .

**Теорема 33.3.** Для функций  $v_i(\xi)$  при  $i \geq 0$  справедливы следующие асимптотические разложения:

$$v_i(\xi) \stackrel{\text{as}}{=} \xi^{3i-1} \sum_{j=0}^{\infty} \xi^{-j} P_{j,i}(\ln \xi), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (33.24)$$



Доказательство соотношения (33.24) в принципе несложно, но требует определенной аккуратности. Для функции  $v_0(\xi)$  утверждение теоремы уже получено выше (формула (33.18)). Будем посредством  $\sigma_i(\xi)$  обозначать асимптотические ряды вида

$$\sum_{j=0}^{\infty} \xi^{-j} P_j(\ln \xi), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (33.25)$$

Функции  $v_i(\xi)$  — это решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка (33.14), правые части которых зависят от функций  $v_j(\xi)$  с номерами  $j < i$ . Если воспользоваться явной формулой для решений  $v_i(\xi)$ , используя выражения (33.24) для  $v_j(\xi)$  при  $j < i$ , то в асимптотическом представлении  $v_i(\xi)$  появятся лишние, слишком большие степени  $\ln \xi$ .

Дальнейшее изучение асимптотики функций  $v_i(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$  удобно проводить в другой независимой переменной. Такой переменной будем считать  $y = v_0(\xi)$ . Эта переменная изменяется от 0 до  $R_0$ .

Посредством  $\rho(y)$  будем обозначать функции, которые имеют асимптотические разложения  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k y^k$  при  $y \rightarrow 0$ .

Так как  $\frac{dv}{d\xi} = \frac{dv}{dy} f(0, y)$ , то все уравнения для  $v_i(\xi)$  при  $i > 0$  имеют вид

$$\frac{dv_i}{dy} = \frac{1}{f(0, y)} \left[ \frac{\partial f}{\partial u}(0, y) v_i + r_i(\xi(y)) \right], \quad v_i(R_0) = 0.$$

Следовательно,

$$v_i(y) = f(0, y) \int_{R_0}^y \frac{1}{f^2(0, \zeta)} r_i(\xi(\zeta)) d\zeta. \quad (33.26)$$

Из (33.20) следует, что  $\xi(y) = y^{-1} - \gamma \ln y + \rho(y)$ . Так как  $f(0, y) = -y^2 + y^3 \rho(y)$ , то

$$\begin{aligned} v_1(y) &= y^2 \rho(y) \int_{R_0}^y \rho(\zeta) \zeta^{-4} (\zeta^{-1} - \gamma \ln \zeta + \rho(\zeta)) d\zeta = \\ &= \rho(y) y^{-2} + \rho(y) y^{-1} \ln y + \rho(y) y^2 \ln^2 y. \end{aligned}$$

Посредством  $\Gamma_m(y)$  будем обозначать функции вида

$$\sum_{k=0}^m \rho_k(y) y^k \ln^k(y).$$

Полученное выражение для  $v_1(y)$ , можно записать в немного более общем виде:  $v_1(y) = y^{-2}\Gamma_2(y)$ . Далее докажем, что

$$v_i(y) = y^{1-3i}\Gamma_{3i-1}(y) \quad (33.27)$$

при  $i > 1$ . Доказательство проведем по индукции. Пусть формулы (33.27) справедливы для всех  $i < n$ . Тогда из вида формулы (33.15) следует, что  $r_n(\xi(y)) = y^{-3n+2}\Gamma_{3n-2}(y)$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} v_n(y) &= f(0, y) \int_{R_0}^y \frac{1}{f^2(0, \zeta, 0)} r_n(\xi(\zeta)) d\zeta = \\ &= y^2 \rho(y) \int_{R_0}^y \rho(\zeta) \zeta^{-4} \zeta^{-3n+2} \Gamma_{3n-2}(\zeta) d\zeta = y^{1-3n} \Gamma_{3n-1}(y). \end{aligned}$$

Окончание доказательства теоремы сводится к замене переменной  $y = v_0(\xi)$  на первоначальную независимую переменную  $\xi$ . Вследствие полученного выше соотношения (33.20)

$$v_0(\xi) = \xi^{-1} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi^{-j} P_{j,0}(\ln \xi) \right),$$

где  $P_{j,0}(z)$  — полиномы степени  $j$ .

Поэтому  $\ln v_0(\xi) = -\ln \xi + \sum_{j=1}^{\infty} \xi^{-j} P_{j,1}(\ln \xi)$ . Из этих равенств и из (33.27) вытекают асимптотические разложения (33.24). ▼

Итак, для решения задачи (33.1), (33.2) построены внешнее разложение (33.5), внутреннее разложение (33.11) и изучены асимптотики коэффициентов при  $x \rightarrow 0$  и при  $\xi \rightarrow \infty$  соответственно. Если следовать приведенным ранее рецептам (§ 28, § 30), то осталось лишь проверить согласованность рядов  $U$  и  $V$  и сконструировать составное асимптотическое разложение. Увы, оказывается, ряды (33.5) и (33.11) между собой не согласованы.

Это видно, например, из того, что в асимптотиках (33.22) присутствуют  $\ln^i \xi$ , которые в переменной  $x$  переходят в  $(\ln x - \ln \varepsilon)^i$  и в асимптотиках (33.9) отсутствуют.

Более того, главный член в выражении  $\varepsilon^i x_i(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$  равен  $\varepsilon^i \xi^{3i-1}$  и после переписывания в переменной  $x$  он превращается в  $\varepsilon^{1-2i} x^{3i-1}$ , т. е. появляются отрицательные и растущие по модулю показатели степеней  $\varepsilon$ . Не только отсутствует общая область, где оба ряда  $U$  и  $V$  являются асимптотическими, но, например, при  $x = \varepsilon^{2/3}$

оба ряда теряют асимптотический характер и оба не могут быть поэтому асимптотическим разложением решения  $u_\varepsilon(x)$ .

Все это наводит на мысль о том, что *существует еще один масштаб и еще одно асимптотическое разложение решения  $u_\varepsilon(x)$  в области, промежуточной между конечными значениями  $x$  и конечными значениями  $\xi$ .*

Так оно и оказывается. Чтобы выяснить правильные масштабы нового асимптотического разложения, надо учесть, что уравнение (33.1) нелинейное и для него играет существенную роль не только изменение масштаба независимой переменной, но и изменение масштаба неизвестной функции  $u_\varepsilon$ .

*Промежуточный пограничный слой*, очевидно, должен находиться около точки  $x = 0$ . Кроме того, решение  $u_0(x)$  равно нулю в этой точке, а  $v_0(\xi)$  также мало при больших  $\xi$ .

Итак, можно считать, что решение в промежуточном слое мало. Поэтому запишем уравнение (33.1) приближенно, заменяя функцию  $f(x, u)$  главными членами ее ряда Тейлора:

$$\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx} \approx x - u_\varepsilon^2. \quad (33.28)$$

Теперь сделаем замену  $u_\varepsilon = \varepsilon^\alpha w_\varepsilon$ ,  $x = \varepsilon^\beta \eta$ , после чего получаем равенство

$$\varepsilon^{1+\alpha-\beta} \frac{dw_\varepsilon}{d\eta} \approx \varepsilon^\beta \eta - \varepsilon^{2\alpha} w_\varepsilon^2.$$

Далее надо приравнять порядки членов в этом равенстве. Заметим, что внешнее разложение (33.5) соответствовало тому, что главными в уравнении (33.28) были два члена в правой части, а внутреннее разложение (33.11) означало уравнивание порядков членов  $\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}$  и  $u_\varepsilon^2$ .

Так что осталась одна возможность: главными членами должны быть  $\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}$  и  $x$ , т. е.  $1 + \alpha - \beta = \beta$ , а оставшийся член  $u_\varepsilon^2$  должен быть того же или меньшего порядка, т. е.  $2\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha \geq 1/3$ . Практика показывает, что в такой ситуации, когда есть произвол в выборе масштабов, надо брать крайние значения параметров. В данном случае это будут  $\beta = 2/3$ ,  $\alpha = 1/3$ , что соответствует равенству порядков всех трех членов в (33.28).

Итак, сделаем замену

$$x = \varepsilon^{2/3} \eta, \quad u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{1/3} w_\varepsilon(\eta). \quad (33.29)$$

Ряд для  $w_\varepsilon(\eta)$  должен иметь более сложный вид, чем ряд по степеням  $\varepsilon^{1/3}$ . Если мы хотим выполнить условие согласования промежуточного разложения с внутренним разложением (33.11), то, учиты-

вая асимптотики (33.22), надо включить в промежуточное разложение степени  $\ln \varepsilon$ .

Как всегда, калибровочные функции асимптотического разложения в переменной  $\eta$  — это те функции от  $\varepsilon$ , которые содержатся в выражении  $A_{m,\eta} A_{n,\xi} V$ , где  $V$  — ряд (33.11), а  $\xi$  и  $\eta$  связаны соотношением  $\eta = \varepsilon^{1/3} \xi$ , что вытекает из (33.29) и из замены  $x = \varepsilon \xi$ . Отсюда видно, что калибровочные функции — это  $\varepsilon^{k/3} \ln^l \varepsilon$ , где  $k \geq 0$ ,  $0 \leq l \leq k$ , а само промежуточное разложение надо искать в виде

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/3} \sum_{l=0}^k w_{k,l}(\eta) \ln^l \varepsilon. \quad (33.30)$$

Уравнения для  $w_{k,l}$  получаются из уравнения для  $w_\varepsilon$ ,

$$\varepsilon^{2/3} \frac{dw_\varepsilon}{d\eta} = f(\varepsilon^{2/3} \eta, \varepsilon^{1/3} w_\varepsilon),$$

после разложения функции  $f(x, u)$  в ряд Тейлора:

$$\frac{dw_{0,0}}{d\eta} - \eta + w_{0,0}^2 = 0, \quad (33.31)$$

$$\frac{dw_{1,1}}{d\eta} + 2w_{0,0}w_{1,1} = 0, \quad (33.32)$$

$$\frac{dw_{1,0}}{d\eta} + 2w_{0,0}w_{1,0} = \eta \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial u} w_{0,0} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial u^3} w_{0,0}^3$$

и т. д.

Все уравнения для  $w_{k,l}$  при  $k > 1$  выглядят просто:

$$\frac{dw_{k,l}}{d\eta} + 2w_{0,0}w_{k,l} = F_{k,l}(\eta), \quad (33.33)$$

где функция  $F_{k,l}(\eta)$  зависит от  $w_{i,s}$  с меньшими номерами и имеет довольно громоздкую форму:

$$\begin{aligned} F_{k,l}(\eta) = & - \sum_{\substack{1 \leq j \leq k-1 \\ 0 \leq l \leq s}} w_{j,s} w_{k-j,l-s} + \\ & + \sum_{q=3}^{\infty} \frac{1}{q!} \frac{\partial^q f}{\partial u^q}(0,0) \sum_{\substack{\sum i_j = k+2-q \\ \sum s_j = l}} \prod_{j=1}^q w_{i_j, s_j} + \\ & + \sum_{\substack{1 \leq p, 0 \leq q \\ 2 \leq p+q}} \frac{1}{p! q!} \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial u^q}(0,0) \eta^p \sum_{\substack{\sum i_j = k+2-q-2p \\ \sum s_j = l}} \prod_{j=1}^q w_{i_j, s_j}. \end{aligned}$$

Все функции  $w_{k,l}(\eta)$  надо рассматривать при  $0 < \eta < \infty$  и подобрать их так, чтобы ряд (33.30) при  $\eta \rightarrow 0$  был согласован с рядом (33.11) при  $\xi \rightarrow \infty$ , а при  $\eta \rightarrow \infty$  он должен быть согласован с рядом (33.5) при  $x \rightarrow 0$ .

Начнем, как всегда, с первого уравнения (33.31). Оно сводится к уже встречавшемуся в § 24 уравнению Эйри после замены

$$w_{0,0}(\eta) = \frac{g'(\eta)}{g(\eta)}.$$

Если  $g(\eta) \neq 0$ , то уравнение (33.31) эквивалентно уравнению

$$\frac{d^2 g}{d\eta^2} - \eta g = 0. \quad (33.34)$$

Теперь предстоит выяснить, какому условию при  $\eta \rightarrow 0$  должна удовлетворять функция  $w_{0,0}(\eta)$ . Главный член ряда (33.11) — это  $v_0(\xi)$ , а главный член асимптотики  $v_0(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$  — это  $\xi^{-1} = \varepsilon^{1/3} \eta^{-1}$ . Следовательно, должно выполняться соотношение

$$w_{0,0}(\eta) \sim \eta^{-1} \quad \text{при } \eta \rightarrow 0.$$

Ясно, что для этого достаточно выбрать такое решение уравнения Эйри (33.34), чтобы  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) = 1$ . Из уравнения (33.34) вытекает, что  $g(\eta)$  — монотонно возрастающая функция, так что  $g(\eta) > 0$  при  $\eta > 0$ . Кроме того, из уравнения (33.34) следует, что ряд Тейлора для функции  $g(\eta)$  имеет следующий вид:

$$g(\eta) = \eta + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \eta^{3k+1}, \quad \eta \rightarrow 0.$$

Тем самым функция  $w_{0,0}(\eta)$  построена. Для нее, очевидно, справедливо асимптотическое разложение

$$w_{0,0}(\eta) \stackrel{\text{as}}{=} \eta^{-1} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_{0,0,j} \eta^{3j} \right), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (33.35)$$

Остальные уравнения (33.31)–(33.33) — это линейные уравнения, решения которых определяются с точностью до слагаемого

$$C \exp \left( - \int 2w_{0,0}(\eta) d\eta \right) = C[g(\eta)]^{-2}.$$

Все эти постоянные находятся из условия согласования ряда (33.30) с рядом (33.11). Процедура этого согласования такая же, как в § 29. Каждый член ряда (33.11) надо заменить его асимптотикой (33.24) при  $\xi \rightarrow \infty$ , перейти к переменной  $\eta$  по формуле  $\xi = \varepsilon^{-1/3} \eta$  и сгруппировать

члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и  $\ln \varepsilon$ . В результате этих формальных выкладок получится равенство

$$V = \varepsilon^{1/3} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/3} \sum_{l=0}^k W_{k,l}(\eta) \ln^l \varepsilon,$$

где  $W_{k,l}(\eta)$  — это формальные ряды следующего вида:

$$W_{k,l}(\eta) = \eta^{-1-k} \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{3j} \sum_{s=0}^l b_{k,l,j,s} \ln^s \eta, \quad (33.36)$$

Для того чтобы было легче проверить эти равенства, можно воспользоваться табл. 5 коэффициентов асимптотических разложений, вполне аналогичной табл. 4 из § 29.

Таблица 5

$W_{\mu} \backslash V_{\mu}$	$v_0(\xi)$	$\mu^3 v_1(\xi)$	$\mu^6 v_2(\xi)$	...
$\mu w_{0,0}(\eta)$	$\xi^{-1}$ — $\mu \eta^{-1}$	$\mu^3 \xi^2$ — $\mu \eta^2$	$\mu^6 \xi^5$ — $\mu \eta^5$	... — ...
$\mu^2 \ln \mu w_{1,1}(\eta)$	$\xi^{-2} \ln \xi$ — $\mu^2 \ln \mu \eta^{-2}$	$\mu^3 \xi \ln \xi$ — $\mu^2 \ln \mu \eta$	$\mu^6 \xi^4 \ln \xi$ — $\mu^2 \ln \mu \eta^4$	... — ...
$\mu^2 w_{1,0}(\eta)$	$\xi^{-2}$ — $\mu^2 \eta^{-2} P_1(\ln \eta)$	$\mu^3 \xi$ — $\mu^2 \eta P_1(\ln \eta)$	$\mu^6 \xi^4$ — $\mu^2 \eta^4 P_1(\ln \eta)$	... — ...
$\mu^3 \ln^2 \mu w_{2,2}(\eta)$	$\xi^{-3} \ln^2 \xi$ — $\mu^3 \ln^2 \mu \eta^{-3}$	$\mu^3 \ln^2 \xi$ — $\mu^3 \ln^2 \mu \eta$	$\mu^6 \xi^3 \ln^2 \xi$ — $\mu^3 \ln^2 \mu \eta^4$	... — ...
$\mu^3 \ln \mu w_{2,1}(\eta)$	$\xi^{-3} \ln \xi$ — $\mu^3 \ln \mu \eta^{-3} P_1(\ln \eta)$	$\mu^3 \ln \xi$ — $\mu^3 \ln \mu \eta P_1(\ln \eta)$	$\mu^6 \xi^3 \ln \xi$ — $\mu^3 \ln \mu \eta^4 P_1(\ln \eta)$	... — ...
$\mu^3 w_{2,0}(\eta)$	$\xi^{-3}$ — $\mu^3 \eta^{-3} P_2(\ln \eta)$	$\mu^3$ — $\mu^3 \eta P_2(\ln \eta)$	$\mu^6 \xi^3$ — $\mu^3 \eta^4 P_2(\ln \eta)$	... — ...

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 33.4.** *Существует решение системы (33.31)–(33.33), такое что каждая из функций  $w_{k,l}(\eta)$  при  $\eta \rightarrow 0$  разлагается в асимптотический ряд  $W_{k,l}(\eta)$ , задаваемый формулой (33.36). Тем самым для рядов (33.30) и (33.11) справедливы условия согласования*

$$A_{m,\eta} A_{n,\xi} V = A_{n,\xi} A_{m,\eta} W.$$

Предварительно докажем две леммы.

**Лемма 33.1.** Пусть функция  $w(\eta)$  является решением уравнения

$$\frac{dw}{d\eta} = \eta - w^2 + \varphi(\eta), \quad (33.37)$$

где  $\varphi(\eta) \in C^\infty(0, 1]$ ,  $\varphi(\eta) = O(\eta^N)$  и  $w(\eta) = \eta^{-1} + O(\eta^2)$  при  $\eta \rightarrow +0$ ,  $N > 0$ .

Тогда  $w(\eta) - w_{0,0}(\eta) = O(\eta^{N+1})$  при  $\eta \rightarrow +0$ , где  $w_{0,0}(\eta)$  — построенная выше функция.

**Доказательство.** Обозначим  $z(\eta) \equiv w(\eta) - w_{0,0}(\eta)$ . Из уравнений (33.31) и (33.37) получаем равенство

$$\frac{dz}{d\eta} + z(w_{0,0}(\eta) + w(\eta)) = \varphi(\eta).$$

По условию  $w_{0,0}(\eta) + w(\eta) = 2\eta^{-1} + \varphi_1(\eta)$ , где  $\varphi_1(\eta) = O(\eta^2)$ . Обозначим

$\mu(\eta) \equiv \exp \int_0^\eta \varphi_1(\theta) d\theta$  и умножим уравнение для  $z$  на интегрирующий множитель  $\eta^2 \mu(\eta)$ . Тогда  $\frac{d}{d\eta} (\eta^2 \mu(\eta) z) = \eta^2 \mu(\eta) \varphi(\eta)$ , откуда

$\eta^2 \mu(\eta) z(\eta) = \int_0^\eta \theta^2 \mu(\theta) \varphi(\theta) d\theta + c$ . Так как  $z(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow 0$ , то постоянная  $c = 0$ . Отсюда вытекает заключение леммы. ▾

**Лемма 33.2.** Пусть функция  $\bar{w}(\eta)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\bar{w}}{d\eta} + 2y(\eta)\bar{w} = \bar{F}(\eta),$$

где функции  $y(\eta)$  и  $\bar{F}(\eta)$  принадлежат  $C^\infty(0, 1]$ . Пусть, кроме того,  $F(\eta) \in C^\infty(0, 1]$ ,  $\bar{F}(\eta) - F(\eta) = O(\eta^N)$ ,  $\bar{w}(\eta) = O(\eta^{-k})$ ,  $y(\eta) - w_{0,0}(\eta) = O(\eta^N)$  при  $\eta \rightarrow +0$ ,  $N > k + 2 \geq 2$ , где  $w_{0,0}(\eta)$  — построенная выше функция.

Тогда существует функция  $w(\eta) \in C^\infty(0, 1]$  — решение уравнения

$$\frac{dw}{d\eta} + 2w_{0,0}(\eta)w = F(\eta),$$

такая что  $w(\eta) - \bar{w}(\eta) = O(\eta^{N-k+1})$  при  $\eta \rightarrow +0$ .

**Доказательство.** Обозначим  $z(\eta) \equiv w(\eta) - \bar{w}(\eta)$  и выпишем уравнение для этой разности:

$$\frac{dz}{d\eta} + 2w_{0,0}(\eta)z + \varphi(\eta)\bar{w}(\eta) = \varphi_1(\eta),$$

где  $\varphi(\eta) = 2w_{0,0}(\eta) - 2y(\eta) = O(\eta^N)$ ,  $\varphi_1(\eta) = F(\eta) - \bar{F}(\eta) = O(\eta^N)$ . Следовательно,

$$\frac{dz}{d\eta} + 2w_{0,0}(\eta)z = \psi(\eta) = O(\eta^{N-k}).$$

Умножая это уравнение на интегрирующий множитель

$$\exp\left(-2 \int_{\eta}^1 w_{0,0}(\theta) d\theta\right)$$

и интегрируя полученное равенство, приходим к соотношению

$$z(\eta) \exp\left(-2 \int_{\eta}^1 w_{0,0}(\theta) d\theta\right) = \int_0^{\eta} \psi(\xi) \exp\left(-2 \int_{\xi}^1 w_{0,0}(\theta) d\theta\right) d\xi + c.$$

Отсюда, полагая  $c = 0$  и учитывая асимптотику (33.35) для  $w_{0,0}$ , приходим к заключению леммы. ▼

**Доказательство теоремы 33.4.** Прежде всего покажем, что частичные суммы ряда (33.11) приближенно удовлетворяют уравнению (33.1), т. е. что ряд (33.11) — это ф. а. р. уравнения (33.1), или, что то же самое, уравнения (33.10) при  $x \ll \varepsilon^{2/3}$ . Для этого обозначим частичную сумму  $A_{n,\varepsilon}V$  посредством  $v_0(\xi) + z_n(\xi, \varepsilon)$  и подставим ее в уравнение (33.10). Получится равенство

$$\frac{d}{d\xi} (A_{n,\varepsilon}V) - f(\varepsilon\xi, A_{n,\varepsilon}V) = R_n(\xi, \varepsilon), \quad (33.38)$$

где предстоит оценить правую часть

$$R_n(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \frac{dv_i}{d\xi} - f(\varepsilon\xi, v_0(\xi) + z_n(\xi, \varepsilon)).$$

Разложим функцию  $f(\varepsilon\xi, v_0(\xi) + z_n(\xi, \varepsilon))$  по формуле Тейлора в точке  $(0, v_0(\xi))$  с остаточным членом в интегральной форме и тем самым представим  $R_n(\xi, \varepsilon)$  в виде суммы:

$$R_n(\xi, \varepsilon) = G_n(\xi, \varepsilon) + \rho_n(\xi, \varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} G_n(\xi, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \frac{dv_i}{d\xi} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \varepsilon^k \xi^k \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!} [z_n(\xi, \varepsilon)]^j \frac{\partial^{k+j}}{\partial x^k \partial u^j} f(0, v_0(\xi)), \\ \rho_n(\xi, \varepsilon) &= -\frac{1}{n!} \varepsilon^{n+1} \xi^{n+1} \times \\ &\times \int_0^1 (1-\theta)^n \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} (\theta \varepsilon \xi, v_0(\xi) + z_n(\xi, \varepsilon)) d\theta - \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon^k \xi^k}{k!} \frac{[z_n(\xi, \varepsilon)]^{n-k+1}}{(n-k)!} \times \\ &\times \int_0^1 (1-\theta)^{n-k} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^k \partial u^{n-k+1}} (0, v_0(\xi) + \theta z_n(\xi, \varepsilon)) d\theta. \end{aligned}$$



В силу системы (33.12)–(33.16) в выражении  $G_n(\xi, \varepsilon)$  обратятся в нуль все коэффициенты при  $\varepsilon^k$  для  $k \leq n$ . (Собственно говоря, именно так, приравниванием коэффициентов при  $\varepsilon^k$  после разложения в ряд Тейлора функции  $f(\varepsilon\xi, V)$ , и получались уравнения (33.31)–(33.33). Просто в выражении  $R_n(\xi, \varepsilon)$  вместо рядов стоят частичные суммы, а отброшенные члены начинаются с  $\varepsilon^{n+1}$ .) Поэтому  $G_n(\xi, \varepsilon)$  — это линейная комбинация членов следующего вида:

$$(\varepsilon\xi)^i \prod_s \varepsilon^{j_s} v_{j_s}(\xi) \frac{\partial^p f}{\partial x^{p_1} \partial u^{p_2}}(0, v_0(\xi)), \quad (33.39)$$

причем  $i + \sum_s j_s \geq n + 1$ .

Так как, в силу асимптотики (33.24), для  $v_i(\xi)$  справедлива оценка

$$|v_i(\xi)| \leq M(1 + \xi^{3j-1}),$$

а функция  $v_0(\xi)$  ограничена, то отсюда вытекает оценка произведений (33.39) и всей суммы  $G_n(\xi, \varepsilon)$  при условии, что  $\varepsilon\xi^3$  ограничено:

$$|G_n(\xi, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{n+1}(1 + \xi^{3(n+1)-1}).$$

Если  $\varepsilon\xi^3$  ограничено, то ограничена и величина  $v_0(\xi) + \theta z_n(\xi, \varepsilon)$ . Поэтому для  $\rho_n(\xi, \varepsilon)$  справедлива та же оценка, что и для  $G_n(\xi, \varepsilon)$ . Тем самым

$$|R_n(\xi, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{n+1}(1 + \xi^{3(n+1)-1}) \quad \text{при } \varepsilon\xi^3 < \text{const}, \quad (33.40)$$

и, следовательно, из (33.38) вытекает, что ряд (33.11) — это ф. а. р. уравнения (33.10) при  $x \ll \varepsilon^{2/3}$ .

Теперь надо проверить, что построенные выше ряды  $W_{k,l}(\eta)$  (формула (33.36)) являются ф. а. р. при  $\eta \rightarrow 0$  уравнений (33.31)–(33.33).

Из способа построения рядов  $W_{k,l}(\eta)$  вытекает, что

$$A_{m,\eta} A_{n,\xi} V = \varepsilon^{1/3} \sum_{k=0}^{3m-1} \varepsilon^{k/3} \sum_{l=0}^k B_{3n-k-1} W_{k,l}(\eta) \ln^l \varepsilon,$$

где  $B_j W$  означает, как и раньше, частичную сумму ряда  $W$  вплоть до степени  $\eta^j$  (ср. аналогичную формулу в доказательстве теоремы 29.2). Применим оператор  $A_{m,\eta}$  к обеим частям равенства (33.38). Очевидно, что

$$A_{m,\eta} \left( \frac{d}{d\xi} A_{n,\xi} V \right) = \varepsilon^{2/3} \sum_{k=0}^{3m-1} \varepsilon^{k/3} \sum_{l=0}^k \ln^l \varepsilon \frac{d}{d\eta} (B_{3n-k-1} W_{k,l}(\eta)).$$

Немного сложнее вычислить значения  $A_{m,\eta}$  от  $f(\varepsilon\xi, A_{n,\xi} V)$ . Для этого надо разложить в асимптотический ряд при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и постоянном  $\eta$  функцию  $f(\varepsilon\xi, A_{n,\xi} V)$ , но ясно, что такая процедура совпада-

ет с теми формальными действиями, которые привели к уравнениям (33.31)–(33.33). Таким образом,  $A_{m,\eta} \left( \frac{d}{d\xi} A_{n,\xi} V - f(\varepsilon\xi, A_{n,\xi} V) \right)$  — это линейная комбинация выражений  $\varepsilon^{k/3} \ln^l \varepsilon$ , где  $k \leq 3m$ , а коэффициентами при них являются левые части уравнений (33.31)–(33.33), где вместо  $w_{k,l}(\eta)$  стоят  $B_{3n-k-1} W_{k,l}(\eta)$ .

Теперь надо применить оператор  $A_{m,\eta}$  к сумме  $R_n(\xi, \varepsilon) = G_n(\xi, \varepsilon) + \rho_n(\xi, \varepsilon)$ . Функция  $G_n(\xi, \varepsilon)$  — это линейная комбинация выражений (33.39); в каждом из них надо сделать замену  $\xi = \varepsilon^{-1/3} \eta$ , разложить в ряд при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и сохранить только члены  $\varepsilon^{k/3} \ln^l \varepsilon$  при  $k \leq 3m$ . Из асимптотик (33.24) следует, что

$$A_{m,\eta} G_n(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{1/3} \sum_{k=0}^{3m-1} \varepsilon^{k/3} \sum_{l=0}^k \varphi_{k,l}(\eta) \ln^l \varepsilon,$$

где  $\varphi_{k,l}(\eta) = O(\eta^{3n-k-1})$ . Нетрудно убедиться, что такой же вид имеет и  $A_{m,\eta} \rho_n(\xi, \varepsilon)$ .

Приравнявая в получившемся равенстве коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon^k$  и  $\ln^l \varepsilon$ , получаем систему уравнений, которая отличается от системы (33.31)–(33.33) только тем, что в левой части вместо  $w_{k,l}(\eta)$  стоят  $B_{3n-k-1} W_{k,l}(\eta)$ , а в правой части вместо нулей стоят  $O(\eta^{3n-k-1})$ . Последовательно применяя к полученным уравнениям леммы 33.1 и 33.2, приходим к заключению теоремы 33.4. ▼

Итак, построены коэффициенты ряда (33.30) — функции  $w_{k,l}(\eta)$  при всех  $\eta \geq 0$ . Осталось теперь проверить согласованность ряда (33.30) при  $\eta \rightarrow \infty$  и ряда (33.5) при  $x \rightarrow 0$ . Для этого надо выяснить прежде всего поведение функций  $w_{k,l}(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \infty$ .

**Теорема 33.5.** Для построенных выше функций  $w_{k,0}(\eta)$ , являющихся решением системы (33.31)–(33.33) — справедливы следующие асимптотические разложения:

$$w_{k,0}(\eta) \stackrel{\text{as}}{=} \eta^{(k+1)/2} \sum_{j=0}^{\infty} h_{k,j} \eta^{-3j/2}, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad h_{0,0} = 1, \quad (33.41)$$

и эти ряды допускают многократное почленное дифференцирование.

При  $l > 0$ ,  $s \geq 0$  справедливы оценки

$$\left| \frac{d^s}{d\eta^s} w_{k,l}(\eta) \right| \leq M \exp(-\eta^{3/2}). \quad (33.42)$$

**Доказательство.** При  $k = 0$  асимптотика (33.41) вытекает из явного представления для функции  $w_{0,0}(\eta) = g'(\eta)[g(\eta)]^{-1}$ , где  $g(\eta) —$

монотонно возрастающая функция Эйри. Известна ее асимптотика при  $\eta \rightarrow \infty$  (она такая же, как асимптотика функции  $Y_1(\xi)$  из § 28):

$$g(\eta) \stackrel{\text{as}}{=} C\eta^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \eta^{-3j/2}\right), \quad \eta \rightarrow \infty,$$

откуда сразу следует асимптотика для функции.

Выражение для функции  $w_{1,1}(\eta)$  выписывается в явном виде из первого уравнения (33.32):

$$\begin{aligned} w_{1,1}(\eta) &= C \exp\left(-2 \int g'(\theta)[g(\theta)]^{-1} d\theta\right) = C_1 [g(\theta)]^{-2} = \\ &= \eta^{1/2} O\left(\exp\left(-\frac{4}{3}\eta^{3/2}\right)\right). \end{aligned}$$

Каждая из функций  $w_{k,l}(\eta)$  при  $k \geq 1$  удовлетворяет уравнению (33.33), где  $F_{k,l}(\eta)$  — это полином от  $\eta$  и  $w_{i,j}(\eta)$  при  $i < k$ . Если  $l > 0$ , то в каждом из слагаемых  $F_{k,l}(\eta)$  присутствует хотя бы один сомножитель  $w_{i,j}(\eta)$  при  $j > 0$ . Отсюда по индукции вытекает оценка (33.42). А для функций  $w_{k,0}(\eta)$  опять-таки из явной формулы для решения уравнения (33.33) по индукции следует асимптотика (33.41). ▼

**Теорема 33.6.** *Ряды (33.5) и (33.30) согласованы: для любых натуральных  $m$  и  $n$  справедливы равенства*

$$A_{n,x} A_{m,\eta} (\varepsilon^{1/3} W) = A_{m,\eta} A_{n,x} (U). \quad (33.43)$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 33.4. Сначала доказываются две леммы, по формулировке почти совпадающие с леммами 33.1 и 33.2. Отличие лишь в том, что вместо асимптотик при  $\eta \rightarrow 0$  всюду рассматриваются асимптотики при  $\eta \rightarrow \infty$ . Кроме того, в лемме 33.2 слова «существует функция  $w(\eta)$ » надо заменить словами «для любого решения  $w(\eta)$ », так как решение однородного уравнения экспоненциально стремится к нулю на бесконечности.

Далее показывается, что частичные суммы ряда (33.5) приближенно удовлетворяют уравнению (33.1), а именно:

$$\varepsilon \frac{d}{dx} A_{n,x} U - f(x, A_{n,x} U) = O\left(\varepsilon^{n+1} x^{-(3n+1)/2}\right). \quad (33.44)$$

При этом одновременно выясняется, что формальные ряды для  $w_{k,0}(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \infty$ , полученные из сумм  $A_{n,x} U$ , являются ф. а. р. системы (33.31)–(33.33) при  $l = 0$ , если считать  $w_{i,s} \equiv 0$  для  $s < 0$ . Отсюда и из упоминавшихся выше лемм следует условие согласования (33.43), так как при  $l > 0$  функции  $w_{k,l}(\eta)$  экспоненциально малы на бесконечности.

Более детальное проведение данного доказательства фактически совпадает с доказательством теоремы 33.4. Не будем приводить его более подробно. ▼

Для удобства обозначения выпишем теперь здесь, в одном месте, построенные выше ряды  $U$ ,  $V$  и  $W$ , а также асимптотики их коэффициентов. При этом посредством  $P_j(z)$  обозначены полиномы от  $z$  степени не выше чем  $j$ , посредством  $s(z)$  — асимптотические ряды  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ,  $z \rightarrow 0$ , а посредством  $\bar{s}(z)$  — асимптотические ряды  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k P_k(\ln z)$ ,  $z \rightarrow 0$ .

Итак,

$$U \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad u_k(x) \stackrel{\text{as}}{=} x^{(1-3k)/2} s_k(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$V \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\xi), \quad v_k(\xi) \stackrel{\text{as}}{=} \xi^{3k-1} \bar{s}_k(\xi), \quad \xi \rightarrow \infty,$$

$$W \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/3} w_{k,l}(\eta) \ln^l \varepsilon,$$

$$w_{k,l}(\eta) \stackrel{\text{as}}{=} \eta^{-1-k} \sum_{j=0}^l s_{k,l,j}(\eta^3) \ln^j \eta, \quad \eta \rightarrow 0,$$

$$w_{k,l}(\eta) \stackrel{\text{as}}{=} \eta^{1+k} s_k(\eta^{-3/2}), \quad \eta \rightarrow \infty,$$

где  $\eta = \varepsilon^{1/3} \xi = \varepsilon^{-2/3} x$ .

**Теорема 33.7.** При всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  существует функция  $u(x, \varepsilon)$  — решение задачи (33.1), (33.2). Ряды  $U$ ,  $\varepsilon^{1/3}W$  и  $V$  являются асимптотическими разложениями решения  $u(x, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в тех областях, где эти ряды сохраняют асимптотический характер, т. е. при  $x \gg \varepsilon^{2/3}$ , при  $\varepsilon \ll x \ll 1$  и при  $x \ll \varepsilon^{2/3}$  соответственно.

На рис. 17 схематически показаны графики функций  $u(x, \varepsilon)$ ,  $u_0(x)$ ,  $\varepsilon^{1/3}w_{0,0}(\eta)$  и  $v_0(\xi)$ .

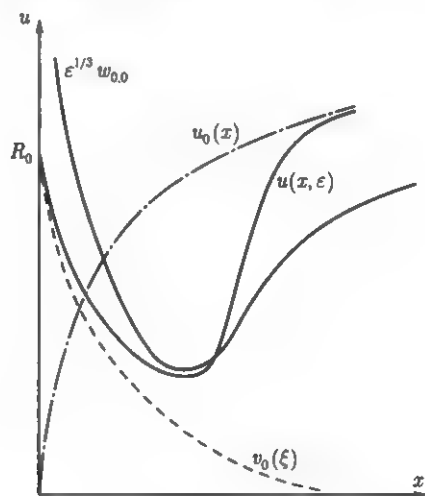
**Теорема 33.8.** Справедлива следующая оценка:

$$\forall x \in [0; d] \quad |u(x, \varepsilon) - z_N(x, \varepsilon)| \leq M \varepsilon^{\gamma N}, \quad (33.45)$$

где  $u(x, \varepsilon)$  — решение задачи (33.1), (33.2),  $\gamma$  — некоторое положительное число, а

$$z_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U + A_{N,\xi}V + A_{N,\eta}(\varepsilon^{1/3}W) - A_{N,\eta}(A_{N,x}U) - \\ - A_{N,\eta}(A_{N,\xi}V).$$

Отметим, что справедливость теоремы 33.7 сразу вытекает из теоремы 33.8, если учесть доказанную выше согласованность рядов  $U$ ,  $\varepsilon^{1/3}W$ ,  $V$  и асимптотику их коэффициентов.

Рис. 17.  $u(x, \varepsilon)$ 

**Доказательство теоремы 3.5.** Прежде всего следует убедиться в том, что составное асимптотическое разложение — функция  $z_N(x, \varepsilon)$  — приблизительно удовлетворяет уравнению (33.1) на отрезке  $[0; d]$ . Для этого надо рассмотреть функцию  $z_N(x, \varepsilon)$  на различных участках отрезка: при  $x \leq \varepsilon^{3/4}$ , при  $\varepsilon^{3/4} \leq x \leq \varepsilon^{1/2}$  и при  $\varepsilon^{1/2} \leq x \leq 1$ . На каждом из этих участков функция  $z_N(x, \varepsilon)$  приблизительно равна  $A_{N,\xi}V$ ,  $A_{N,\eta}(\varepsilon^{1/3}W)$  и  $A_{N,x}U$  соответственно, а сумма остальных слагаемых мала в силу условий согласования (теоремы 33.4 и 33.6). (Вместо показателей  $3/4$  и  $1/2$  можно было бы взять любые числа  $\alpha$  и  $\beta$ , лишь бы  $2/3 < \alpha < 5/6$ ,  $0 < \beta < 2/3$ .)

С другой стороны, из самого способа построения рядов и из оценок их коэффициентов следует, что частичные суммы этих рядов приблизительно удовлетворяют уравнению (33.1) (см. (33.38), (33.40), (33.43)), так что для достаточно больших  $N$

$$\varepsilon \frac{dz_N}{dx} - f(x, z_N) = \varphi_N(x, \varepsilon), \quad \text{где } |\varphi_N(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^{\gamma_1 N}, \quad \gamma_1 > 0. \quad (33.46)$$

Точное значение  $\gamma_1$  нетрудно установить, но оно для дальнейшего изложения несущественно.

Обозначим  $y_N(x, \varepsilon) \equiv z_N(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x)$ . Так как пока существование решения задачи (33.1), (33.2) на всем отрезке  $[0; d]$  не доказано, то функция  $y_N(x, \varepsilon)$  определена лишь для тех значений  $x$ , для которых

решение  $u(x, \varepsilon)$  существует. Из общей теоремы о существовании решения задачи Коши вытекает, что функция  $u(x, \varepsilon)$  существует при  $x \in [0; \lambda]$ , где постоянная  $\lambda > 0$  зависит, вообще говоря, от  $\varepsilon$ . При этом решение  $u(x, \varepsilon)$  может быть продолжено на весь отрезок  $[0; d]$ , если оно равномерно ограничено.

Будем рассматривать функцию  $u(x, \varepsilon)$  на отрезке  $[0; \lambda(\varepsilon)]$  и докажем, что  $y_N(x, \varepsilon)$  ограничено (и даже мало). Отсюда сразу следует, что решение  $u(x, \varepsilon)$  продолжимо на отрезок  $[0; d]$ .

Вычитая почленно из уравнения (33.46) уравнение (33.1), получим равенство

$$\varepsilon \frac{dy_N}{dx} - y_N \frac{\partial f}{\partial u}(x, z_N - \theta y_N) = \varphi_N(x, \varepsilon), \quad 0 < \theta < 1.$$

Так как по построению  $A_{N,\varepsilon} V|_{\xi=0} = u(0, \varepsilon) = R_0$ , то  $y_N(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{\gamma_N})$ . Интегрируя полученное уравнение для  $y_N$  и обозначая

$$\beta_N(x, \varepsilon) \equiv \frac{\partial f}{\partial u}(x, z_N(x, \varepsilon) - \theta y_N(x, \varepsilon)),$$

приходим к формуле для  $y_N$ :

$$y_N(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^x \varphi(\theta, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^x \beta(\zeta, \varepsilon) d\zeta\right) d\theta + O(\varepsilon^{\gamma_N}). \quad (33.47)$$

Заключение теоремы сразу вытекает из этой формулы и оценки для  $\varphi_N(x, \varepsilon)$ , если только  $\beta_N(x, \varepsilon) \leq 0$ . Однако надо учесть, что функция  $\beta_N(x, \varepsilon)$  в свою очередь зависит от функций  $z_N(x, \varepsilon)$  и  $y_N(x, \varepsilon)$  и проверка неотрицательности  $\beta_N$  требует некоторых усилий.

Сначала надо оценить снизу функцию  $z_N(x, \varepsilon)$ . При  $x \leq \varepsilon^{3/4}$  функция

$$A_{N,\varepsilon} V \geq (\xi + M)^{-1} - M \sum_{k=1}^N \varepsilon^k (1 + \xi^{3k-1}) \geq M \varepsilon^{1/4}.$$

(Посредством  $M$ , как всегда, обозначаются положительные постоянные, не зависящие от  $x$  и  $\varepsilon$ , а  $\varepsilon$  считается достаточно малым.)

При  $\varepsilon^{3/4} \leq x \leq \varepsilon^{1/2}$ , т. е. при  $\varepsilon^{1/2} \leq \eta \leq \varepsilon^{-1/6}$  функция

$$A_{N,\eta}(\varepsilon^{1/3} W) \geq$$

$$\geq \varepsilon^{1/3} \left( w_0(\eta) - M \sum_{k=1}^{3N-1} \varepsilon^{k/3} |\ln^k \varepsilon| \cdot (\eta^{-1-k} + \eta^{(1+k)/2}) \right) \geq M \varepsilon^{1/3}.$$

Наконец, при  $x \geq \varepsilon^{1/2}$  функция

$$A_{N,x}U \geq u_0(x) - M \sum_{k=1}^N \varepsilon^k x^{(1-3k)/2} \geq u_0(x) - M\varepsilon^{1/2}.$$

Значит, при  $x \leq \varepsilon^{1/2}$  функция  $z_N(x, \varepsilon) \geq M\varepsilon^{1/4}$ , а при  $x \geq \varepsilon^{1/2}$  функция  $z_N(x, \varepsilon) \geq u_0(x) - M\varepsilon^{1/2}$ . Из этих неравенств и из условий (33.3), (33.4) вытекает, что если  $|z_N(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x)| < M\varepsilon$ , то при  $0 < \theta < 1$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, z_N(x, \varepsilon) - \theta(z_N(x, \varepsilon) - u_\varepsilon(x))) \leq 0.$$

Следовательно, для тех  $x_0$ , для которых справедливо неравенство  $|y_N(x, \varepsilon)| < M\varepsilon$  при  $0 \leq x \leq x_0$ , из (33.47) вытекает, что  $|y_N(x, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{\gamma_1 N-1}$ . При достаточно большом  $N$  отсюда следует неравенство (33.45). ▼

Так как оценка (33.45) справедлива для всех достаточно больших  $N$ , то из нее и из явной структуры рядов  $U$ ,  $V$  и  $W$  вытекает, что в этом неравенстве  $N$  — любое натуральное число и можно положить  $\gamma = 1/4$ .

## Глава 9

# МЕТОД ДВУХ МАСШТАБОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

### § 34. Постановка задачи. Построение формальной АСИМПТОТИКИ

Рассмотрим начальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = \varepsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right), \quad (34.1)$$

$$u(0, \varepsilon) = a, \quad \frac{du}{dt}(0, \varepsilon) = b. \quad (34.2)$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $\omega$  — положительный параметр,  $f(u, v)$  — бесконечно дифференцируемая функция двух переменных в  $\mathbb{R}^2$ . Вопрос заключается в исследовании решения задачи (34.1), (34.2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Исторически эта тематика восходит к изучению движения планет. Если учитывать лишь притяжение Солнца, то планета движется по эллипсу согласно законам Кеплера, движение ее периодическое и может быть описано уравнениями Ньютона. Однако если учесть притяжение со стороны других планет (они малы по сравнению с притяжением Солнца, являются так называемыми малыми возмущениями), то в уравнениях появляются малые члены. Поэтому из-за малых возмущений движение в действительности является более сложным, непериодическим. Отклонения за один период (для Земли это один год) от простого кеплеровского движения невелики, но за большой срок (за века) они накапливаются. Потребность в вычислении этих отклонений (например, для предсказания солнечных и лунных затмений) и породила желание изучить влияние малых возмущений.

Кстати, в результате исследования возмущения движений Урана была открыта Дж. Адамсом и У. Леверье «на кончике пера» планета Нептун.

В недавнее время аналогичная тематика получила сильное стимулирующее воздействие в связи с необходимостью изучения отклонения



движения искусственных спутников за время, во много раз превышающее их периоды.

Математически совершенно аналогичные вопросы возникают при исследовании малых воздействий на любые колебательные системы. Многочисленные примеры из механики, электро- и радиотехники и др., а также библиография приводятся в [3].

Здесь задача будет проиллюстрирована на простейшем уравнении (34.1). Невозмущенная задача (34.1), (34.2) (при  $\varepsilon = 0$ ) имеет простое решение:

$$u_0(t) = a \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t. \quad (34.3)$$

Из известных общих теорем для обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что на любом конечном отрезке  $[0; t_0]$  решение  $u_\varepsilon(t)$  задачи (34.1), (34.2) равномерно стремится к решению  $u_0(t)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Более того, оно бесконечно дифференцируемо по  $\varepsilon$  в окрестности точки  $\varepsilon = 0$  и, следовательно, разлагается в асимптотический ряд по  $\varepsilon$ .

$$u_\varepsilon(t) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t), \quad \varepsilon \rightarrow \infty. \quad (34.4)$$

Если  $f(u, v)$  аналитическая, то ряд (34.4) является даже сходящимся при малых  $\varepsilon$ , т.е.  $u_\varepsilon(t)$  — аналитическая функция относительно  $\varepsilon$  (см., например, [12, §§ 17, 21]).

Однако а priori неясно, является ли асимптотическое разложение равномерным относительно длины  $t_0$  при больших  $t_0$ , и даже неясно, существует ли решение  $u_\varepsilon(t)$  на достаточно большом отрезке времени. Например, существует ли оно на отрезке времени порядка  $\varepsilon^{-1/2}$  или  $\varepsilon^{-1}$ , или  $\varepsilon^{-2}$ ?

Для того чтобы пояснить возникающие трудности, рассмотрим простейший пример уравнения (34.1):

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = -2\varepsilon \frac{du}{dt}, \quad (34.5)$$

с условиями (34.2). Решение этой задачи (при  $\varepsilon < \omega$ ) имеет вид

$$\exp(-\varepsilon t) \left( a \cos \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} t + \frac{b + \varepsilon a}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} t \right).$$

Посмотрим, к чему приводит поиск решения в виде (34.4).

Члены ряда (34.4) легко получаются, если подставить этот ряд в уравнение (34.5) и условия (34.2) и затем приравнять члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ :

$$u_0(0) = a, \quad \frac{du_0}{dt}(0) = b, \quad u_k(0) = \frac{du_k}{dt}(0) = 0 \quad \text{при } k > 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_0}{dt^2} + \omega^2 u_0 &= 0, \\ \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega^2 u_1 &= -2 \frac{du_0}{dt}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^2 u_{k+1}}{dt^2} + \omega^2 u_{k+1} &= -2 \frac{du_k}{dt}.\end{aligned}$$

Отсюда  $u_0(t)$  определяется формулой (34.3):

$$\begin{aligned}u_1(t) &= -at \cos \omega t - \frac{b}{\omega} t \sin \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t, \\ u_2(t) &= at^2 \cos \omega t + \frac{b}{\omega} t^2 \sin \omega t + O(t), \quad t \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

и т. д.

Очевидно, что выражение для  $\varepsilon^k u_k(t)$  будет содержать члены вида

$$(\varepsilon t)^k (\alpha_k \cos \omega t + \beta_k \sin \omega t).$$

Так что ряд (34.4) довольно плохо приближает решение при больших значениях времени  $t$ , а при  $t$  порядка  $\varepsilon^{-1}$  ряд вообще теряет асимптотический характер: следующий член ряда не является малым высшего порядка по сравнению с предыдущими членами. Виновными в плохом поведении ряда (34.4) являются неперiodические слагаемые вида  $t^k \cos \omega t$ ,  $t^k \sin \omega t$ . Они носят название *секулярных* (или вековых) членов. Этимология термина понятна из того, что сказано выше (*saecularis* — по-латински означает вековой, в астрономической интерпретации влияние этих членов сказывается через века).

Методика построения асимптотического приближения решения задачи (34.1), (34.2) на достаточно большом отрезке времени основана как раз на том, чтобы избавиться от секулярных членов. Она изучалась в различных математических работах (в частности, в известной монографии [3]).

Материал этой главы опирается на работу [1, гл. 3], математическое изложение в которой представляется нам наиболее удачным. Как видно из рассмотренного примера, влияние малого слагаемого  $\varepsilon f(u, \frac{du}{dt})$  сказывается за время порядка  $\varepsilon^{-1}$ . Таким образом, характерным временем медленного изменения параметров основного колебательного процесса является так называемое *медленное время*  $\tau = \varepsilon t$ . Поэтому решение задачи (34.1) будем искать в виде формального ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t, \tau). \quad (34.6)$$

Дальнейший план состоит в построении коэффициентов ряда, где функции  $u_k(t, \tau)$  считаются функциями двух независимых переменных  $t$  и  $\tau$ . Затем предстоит доказать, что построенный ряд (34.6) при  $\tau = \varepsilon t$  действительно является асимптотическим рядом для решения  $u_\varepsilon(t)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , равномерным на отрезке  $[0; L\varepsilon^{-1}]$ , где значение  $L$  будет указано в дальнейшем.

Период возмущенного колебания  $\frac{2\pi}{\omega}$  будет всюду обозначаться посредством  $T$ . Предварительно докажем очень простую, но весьма полезную вспомогательную лемму.

**Лемма 34.1.** Пусть  $F(t) \in C^\infty$  — это  $T$ -периодическая функция. Для того чтобы уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = F(t) \quad (34.7)$$

имело периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\int_0^T F(t) \sin \omega t \, dt = \int_0^T F(t) \cos \omega t \, dt = 0. \quad (34.8)$$

При выполнении этих условий все решения уравнения являются  $T$ -периодическими.<sup>1)</sup>

**Доказательство.** Разложим функцию  $F(t)$  в ряд Фурье:

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\omega t + d_k \sin k\omega t).$$

Так как  $F(t) \in C^\infty$ , то этот ряд абсолютно сходится и неограниченное число раз допускает почленное дифференцирование (более того, коэффициенты  $c_k$  и  $d_k$  стремятся к нулю быстрее любой степени  $k^{-1}$ ).

Прямой подстановкой легко убедиться в том, что функция

$$u(t) = \frac{c_0}{2\omega^2} + \frac{c_1}{2\omega} t \sin \omega t - \frac{d_1}{2\omega} t \cos \omega t + \sum_{k=2}^{\infty} (1 - k^2)^{-1} (c_k \cos k\omega t + d_k \sin k\omega t) \quad (34.9)$$

является решением уравнения (34.7).

<sup>1)</sup> Чтобы утверждение этой леммы было справедливым, конечно, достаточно лишь непрерывности функции  $F(t)$ . Требование бесконечной дифференцируемости  $F(t)$  указано лишь для упрощения доказательства. Кроме того, для дальнейшего построения бесконечного асимптотического ряда решения  $u_\varepsilon(t)$  все равно потребуется бесконечная дифференцируемость рассматриваемых функций.

Так как общее решение однородного уравнения (34.7) —  $T$ -периодическая функция, то, следовательно, для того чтобы любое решение неоднородного уравнения (34.7) было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$c_1 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \omega t \, dt = 0, \quad d_1 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \omega t \, dt = 0.$$

В этом случае в формуле (34.9) обратятся в нуль единственные неперіодические, секулярные члены. И тогда любое решение будет  $T$ -периодическим. ▼

Теперь можно приступить к построению коэффициентов формального асимптотического разложения (34.6). Для этого надо подставить ряд (34.6) в уравнение (34.1) и учесть, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

В результате уравнение (34.1) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left( \frac{\partial^2 u_k(t, \tau)}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u_k(t, \tau)}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_k(t, \tau)}{\partial \tau^2} + \omega^2 u_k(t, \tau) \right) = \\ = f \left( u_0(t, \tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t, \tau), \frac{\partial u_0(t, \tau)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u_0(t, \tau)}{\partial \tau} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left( \frac{\partial u_k(t, \tau)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u_k(t, \tau)}{\partial \tau} \right) \right). \end{aligned}$$

Далее правую часть этого равенства следует разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $\left( u_0(t, \tau), \frac{\partial u_0(t, \tau)}{\partial t} \right)$  и после этого приравнять члены при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$ . В результате получается рекуррентная система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \omega^2 u_0 = 0, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial \tau} + f \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \omega^2 u_2 = -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) u_1 + \\ \quad + \frac{\partial f}{\partial v} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right), \\ \dots \end{cases} \quad (34.10)$$

Общий вид уравнения при  $k > 2$  следующий:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + \omega^2 u_k = -2 \frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial^2 u_{k-2}}{\partial \tau^2} + \\ + \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \varepsilon^{k-1}} f \left( \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t, \tau), \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left( \frac{\partial u_k(t, \tau)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u_k(t, \tau)}{\partial \tau} \right) \right) \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (34.11)$$

Теперь будем последовательно решать эти уравнения, предварительно выписав для них начальные условия. Эти условия получаются подстановкой ряда (34.6) в равенства (34.2) и приравниванием членов при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{cases} u_0(0, 0) = a, \\ u_k(0, 0) = 0, \quad k > 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial t}(0, 0) = b, \\ \frac{\partial u_k}{\partial t}(0, 0) = -\frac{\partial u_{k-1}}{\partial \tau}(0, 0), \quad k > 0. \end{cases} \quad (34.12)$$

Решение первого из уравнений системы (34.10) имеет вид

$$u_0(t, \tau) = A(\tau) \cos(\omega t + B(\tau)). \quad (34.13)$$

В этой формуле  $\tau$  считается фиксированным числом, не зависящим от  $t$ , так как уравнения системы (34.10), (34.11) — это обыкновенные дифференциальные уравнения относительно независимой переменной  $t$ , содержащие  $\tau$  в качестве параметра. Из условий (34.12) вытекает, что  $A(0) \cos B(0) = a$ ,  $-\omega A(0) \sin B(0) = b$  и, следовательно,

$$A(0) = \sqrt{a^2 + b^2 \omega^{-2}}, \quad \operatorname{tg} B(0) = -b(a\omega)^{-1}. \quad (34.14)$$

В формуле (34.13) амплитуда  $A(\tau)$  и фаза  $B(\tau)$  остаются пока неизвестными функциями, известны лишь их начальные значения (34.14). Для определения  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  надо обратиться ко второму из уравнений системы (34.10) и потребовать, чтобы его решение было периодическим (а следовательно, и ограниченным). Другими словами, надо потребовать, чтобы в решении отсутствовали секулярные члены — в этом, по сути дела, состоит основное содержание метода. Согласно лемме для этого необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения была ортогональна функциям  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  на отрезке  $[0; T]$ .

Обозначим  $\psi(t) = \omega t + B(\tau)$ . Так как  $\cos \psi(t)$  и  $\sin \psi(t)$  являются линейными комбинациями функций  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  и, наоборот,  $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$  являются линейными комбинациями функций  $\cos \psi(t)$ ,  $\sin \psi(t)$ , то условие ортогональности правой части уравнения функциям  $\cos \omega t$ ,

$\sin \omega t$  эквивалентно ортогональности функциям  $\cos \psi(t)$ ,  $\sin \psi(t)$ . Такое замечание немного сокращает дальнейшие выкладки. Итак, выпишем условия ортогональности, учитывая вид (34.13) для  $u_0(t, \tau)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left( -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial \tau} + f \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \right) \cos \psi(t) dt = \\ = \int_0^T \left( 2\omega A'(\tau) \sin \psi(t) + 2\omega A(\tau) B'(\tau) \cos \psi(t) + \right. \\ \left. + f(A(\tau) \cos \psi(t), -\omega A(\tau) \sin \psi(t)) \right) \cos \psi(t) dt = 0, \\ \int_0^T \left( 2\omega A'(\tau) \sin \psi(t) + 2\omega A(\tau) B'(\tau) \cos \psi(t) + \right. \\ \left. + f(A(\tau) \cos \psi(t), -\omega A(\tau) \sin \psi(t)) \right) \sin \psi(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Перейдем в этих интегралах к новой независимой переменной  $\psi = \omega t + B(\tau)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left( 2\omega A'(\tau) \sin \psi + 2\omega A(\tau) B'(\tau) \cos \psi + \right. \\ \left. + f(A(\tau) \cos \psi, -\omega A(\tau) \sin \psi) \right) \cos \psi d\psi = 0, \\ \int_0^{2\pi} \left( 2\omega A'(\tau) \sin \psi + 2\omega A(\tau) B'(\tau) \cos \psi + \right. \\ \left. + f(A(\tau) \cos \psi, -\omega A(\tau) \sin \psi) \right) \sin \psi d\psi = 0. \end{aligned}$$

Если учесть, что  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \pi$ ,  $\int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi = 0$ , то получаем два равенства:

$$2\pi\omega A'(\tau) = - \int_0^{2\pi} f(A(\tau) \cos \psi, -\omega A(\tau) \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (34.15)$$

$$2\pi\omega A(\tau) B'(\tau) = - \int_0^{2\pi} f(A(\tau) \cos \psi, -\omega A(\tau) \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (34.16)$$

Равенство (34.15) — это нелинейное дифференциальное уравнение относительно  $A(\tau)$  с гладкой правой частью. Согласно теореме о су-

существовании решения начальной задачи [12] для такого уравнения существует отрезок  $[0; L]$ , на котором задача (34.15), (34.14) имеет единственное решение. Это число  $L$  будет фиксированным до самого конца исследования. Таким образом, на отрезке  $[0; L]$  определена амплитуда  $A(\tau)$ .

Из тривиального уравнения (34.16) для  $B(\tau)$  и из начального условия (34.14) на том же отрезке определяется функция  $B(\tau)$ .

Теперь предстоит найти следующий член разложения (34.6) —  $u_1(t, \tau)$ . Наложённые выше условия ортогональности гарантируют, что при каждом фиксированном  $\tau \in [0; L]$  все решения второго из уравнений системы (34.10) ограничены и являются  $T$ -периодическими по  $t$ . Выберем решение с нулевыми начальными условиями и обозначим его через  $\tilde{u}_1(t, \tau)$ .

В определении  $u_1(t, \tau)$  остался еще произвол:

$$u_1(t, \tau) = \tilde{u}_1(t, \tau) + C_1(\tau) \cos \omega t + D_1(\tau) \sin \omega t. \quad (34.17)$$

Здесь  $C_1(\tau)$  и  $D_1(\tau)$  — пока что произвольные функции от  $\tau$ , удовлетворяющие начальным условиям, которые получаются из условий (34.12) при  $k = 1$ :

$$C_1(0) = 0, \quad \omega D_1(0) = -\frac{\partial u_0}{\partial \tau}(0, 0). \quad (34.18)$$

Для определения  $C_1(\tau)$  и  $D_1(\tau)$  всюду на отрезке  $[0; L]$  надо рассмотреть уравнение системы (34.10) при  $k = 2$ . Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \omega^2 u_2 = & -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) u_1 + \\ & + \frac{\partial f}{\partial v} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (34.19)$$

Здесь посредством  $\frac{\partial f}{\partial v}$  обозначается производная функции  $f$  по второму аргументу.

Выберем  $u_1(t, \tau)$  таким образом, чтобы решение этого уравнения было периодическим по  $t$ . Согласно лемме для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие ортогональности правой части уравнения функциям  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  на отрезке  $[0; T]$ .

Воспользуемся видом (34.17) для  $u_1(t, \tau)$  и выпишем лишь те слагаемые в правой части уравнения (34.19), которые зависят от  $u_1(t, \tau)$ :

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) u_1 + \frac{\partial f}{\partial v} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \frac{\partial u_1}{\partial t} = \\ = -2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial t \partial \tau} + 2\omega C_1'(\tau) \sin \omega t - 2\omega D_1'(\tau) \cos \omega t + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) (\tilde{u}_1 + C_1(\tau) \cos \omega t + D_1(\tau) \sin \omega t) + \\ + \frac{\partial f}{\partial v} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} - \omega C_1(\tau) \sin \omega t + \omega D_1(\tau) \cos \omega t \right).$$

Таким образом, упомянутые выше условия ортогональности имеют вид

$$\begin{cases} 2\pi C_1'(\tau) = R_{11}(\tau)C_1(\tau) + R_{12}(\tau)D_1(\tau) + S_1(\tau), \\ 2\pi D_1'(\tau) = R_{21}(\tau)C_1(\tau) + R_{22}(\tau)D_1(\tau) + S_2(\tau), \end{cases} \quad (34.20)$$

где  $R_{ij}$  и  $S_i$  — это уже известные функции:

$$R_{11}(\tau) = \int_0^T \left( \omega \sin \omega t \frac{\partial f}{\partial v} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) - \cos \omega t \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \right) \sin \omega t dt,$$

$$R_{12}(\tau) = \int_0^T \left( -\omega \cos \omega t \frac{\partial f}{\partial v} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) - \sin \omega t \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \right) \sin \omega t dt,$$

$$R_{21}(\tau) = \int_0^T \left( -\omega \sin \omega t \frac{\partial f}{\partial v} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + \cos \omega t \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \right) \cos \omega t dt,$$

$$R_{22}(\tau) = \int_0^T \left( \omega \cos \omega t \frac{\partial f}{\partial v} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + \sin \omega t \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \right) \cos \omega t dt,$$

$$S_1(\tau) = \int_0^T \left[ 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \tilde{u}_1 - \right. \\ \left. - \frac{\partial f}{\partial v} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right) \right] \sin \omega t dt,$$

$$S_2(\tau) = - \int_0^T \left[ 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \tilde{u}_1 - \right. \\ \left. - \frac{\partial f}{\partial v} \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right) \right] \cos \omega t dt.$$

Определим  $C_1(\tau)$ ,  $D_1(\tau)$  как решение системы (34.20), которое удовлетворяет начальным условиям (34.18). Поскольку для  $C_1(\tau)$  и  $D_1(\tau)$  получились линейные системы, то все решения этих систем определены всюду, где определены входящие в нее функции, в том числе  $u_0$ , т. е. на  $[0; L]$ .



После этого все решения уравнения (34.19) ограничены и любое его решение определяется с точностью до слагаемого  $C_2(\tau) \cos \omega t + D_2(\tau) \sin \omega t$ . Из условий (34.12) при  $k = 2$  опять-таки определяются начальные значения для  $C_2(\tau)$ ,  $D_2(\tau)$ . А из условия ограниченности  $u_3(t, \tau)$  получается система уравнений для  $C_2(\tau)$ ,  $D_2(\tau)$ , которая отличается от системы (34.20) лишь правыми частями  $S_1(\tau)$  и  $S_2(\tau)$ .

Далее процесс продолжается неограниченно. В результате могут быть построены функции  $u_k(t, \tau)$  для всех  $k \geq 0$ , так что ряд (34.6), в котором  $\tau = \varepsilon t$ , формально удовлетворяет уравнению (34.1) и начальным условиям (34.2). При этом каждая из функций  $u_k(t, \tau)$  определена и ограничена при  $0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}L$ .

Теперь предстоит доказать, что построенный ряд (34.6) действительно является асимптотическим разложением решения задачи (34.1), (34.2) на отрезке  $[0; \varepsilon^{-1}L]$  (а заодно и доказать не вполне очевидное утверждение, что на таком большом отрезке существует решение этой нелинейной задачи).

### § 35. Обоснование асимптотического разложения. Уравнение Ван дер Поля

**Теорема 35.1.** Пусть  $L$  — число, определенное в предыдущем параграфе, а  $u_k(t, \tau)$  — построенные там коэффициенты формального асимптотического разложения (34.6), где  $\tau = \varepsilon^{-1}t$ . Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  на отрезке  $[0; \varepsilon^{-1}L]$  существует решение  $u_\varepsilon(t)$  задачи (34.1), (34.2) и для любого натурального  $N$  справедлива оценка

$$|u_\varepsilon(t) - \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t)| < M \varepsilon^{N+1}, \quad t \in [0; \varepsilon^{-1}L],$$

где постоянная  $M$  не зависит от  $\varepsilon$  и  $t$ .

**Доказательство.** Введем обозначение

$$R(t) = u_\varepsilon(t) - \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t),$$

опуская для простоты индексы  $\varepsilon$  и  $N$  у этой разности. Найдем начальные данные для  $R(t)$  и значения  $\frac{d^2 R}{dt^2} + \omega^2 R$ . Из условий (34.12) и уравнения (34.1) вытекает, что

$$R(0) = 0, \quad \frac{dR}{dt}(0) = -\varepsilon^{N+1} \frac{\partial u_N}{\partial \tau}(0, 0), \quad (35.1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 R}{dt^2} + \omega^2 R = & -\frac{d^2}{dt^2} \left( u_0(t, \tau) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) \right) - \\
& - \omega^2 \left( u_0(t, \tau) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) \right) + \\
& + \varepsilon f \left( u_0(t, \tau) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) + R(t), \frac{d}{dt} \left[ u_0(t, \tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) + R(t) \right] \right). \quad (35.2)
\end{aligned}$$

Правую часть этого равенства удобно представить в виде двух слагаемых  $H_0(\varepsilon, t)$  и  $\varepsilon H(\varepsilon, t, R(t), \frac{dR}{dt})$ , где

$$\begin{aligned}
H_0(\varepsilon, t) = & -\frac{d^2}{dt^2} \left( u_0(t, \tau) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) \right) - \\
& - \omega^2 \left( u_0(t, \tau) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) \right) + \varepsilon f \left( u_0(t, \tau) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t), \frac{d}{dt} \left[ u_0(t, \tau) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) \right] \right),
\end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}
H(\varepsilon, t, R(t), \frac{dR}{dt}) = & f \left( u_0(t, \tau) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) + \right. \\
& \left. + R(t), \frac{d}{dt} \left[ u_0(t, \tau) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) + R(t) \right] \right) - f \left( u_0(t, \tau) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t), \frac{d}{dt} \left[ u_0(t, \tau) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) \right] \right). \quad (35.3)
\end{aligned}$$

В выражении для функции  $H_0(\varepsilon, t)$  надо разложить функцию  $f$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)$  с остаточным членом порядка  $N+1$ . Заметим, что согласно построению функций  $u_k(t, \tau)$  — решений системы системы (34.10), (34.11) — правая часть равенства (35.3) обратится в нуль, если формально разложить функцию  $f$

в бесконечный ряд Тейлора (именно так и строились уравнения системы (34.10), (34.11)). Поэтому при разложении ее в конечную сумму с остаточным членом взаимно уничтожатся все слагаемые, которые не содержат  $R$  и в которых показатель степени  $\varepsilon$  меньше чем  $N+1$ . Следовательно,  $H_0(\varepsilon, t) = \varepsilon^{N+1} G_N(\varepsilon, t)$ , где  $G_N(\varepsilon, t)$  — гладкая ограниченная функция на отрезке  $[0; \varepsilon^{-1}L]$ .

Из гладкости функции  $f(u, v)$  и из ограниченности всех функций  $u_k(t, \tau)$  вытекает, что при

$$|R(t)| + \left| \frac{dR}{dt}(t) \right| \leq 1 \quad (35.4)$$

на отрезке  $[0; \varepsilon^{-1}L]$  справедливы оценки

$$H\left(\varepsilon, t, R(t), \frac{dR}{dt}(t)\right) < M_1 \left( |R(t)| + \left| \frac{dR}{dt}(t) \right| \right),$$

$$\begin{aligned} \left| H\left(\varepsilon, t, R_1(t), \frac{dR_1}{dt}(t)\right) - H\left(\varepsilon, t, R_2(t), \frac{dR_2}{dt}(t)\right) \right| < \\ < M_1 \left( |R_1(t) - R_2(t)| + \left| \frac{dR_1}{dt}(t) - \frac{dR_2}{dt}(t) \right| \right). \end{aligned}$$

Здесь и всюду далее постоянные  $M_i$  не зависят от  $\varepsilon$  и  $t$ .

Уравнение (35.2) можно записать в виде

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \omega^2 R = \varepsilon^{N+1} G_N(\varepsilon, t) + \varepsilon H\left(\varepsilon, t, R(t), \frac{dR}{dt}(t)\right). \quad (35.5)$$

Вопрос о существовании решения задачи (34.1), (34.2) на отрезке  $[0; \varepsilon^{-1}L]$  эквивалентен вопросу о существовании решения задачи (35.2), (35.1) на том же отрезке.

Ниже будет доказано существование решения этой задачи стандартным методом последовательных приближений, а заодно и будет получена оценка  $R(t)$ . Из известной общей теоремы следует существование решения начальной задачи на некотором (может быть, малом) отрезке  $[0; t_0]$ .

Правую часть уравнения (35.5)  $\varepsilon^{N+1} G_N(\varepsilon, t) + \varepsilon H\left(\varepsilon, t, R(t), \frac{dR}{dt}(t)\right)$  обозначим  $F\left(t, \varepsilon, R, \frac{dR}{dt}\right)$ . Таким образом, если на некотором отрезке  $[0; t_0]$  справедливо соотношение (35.4), то на нем же справедливы следующие неравенства:

$$\left| F\left(t, \varepsilon, R, \frac{dR}{dt}\right) \right| \leq M_2 \varepsilon^{N+1} + M_2 \varepsilon \left( |R(t)| + \left| \frac{dR}{dt}(t) \right| \right), \quad (35.6)$$

$$\begin{aligned} \left| F\left(t, \varepsilon, R_1(t), \frac{dR_1}{dt}(t)\right) - F\left(t, \varepsilon, R_2(t), \frac{dR_2}{dt}(t)\right) \right| \leq \\ \leq M_2 \left( |R_1(t) - R_2(t)| + \left| \frac{dR_1}{dt}(t) - \frac{dR_2}{dt}(t) \right| \right). \end{aligned} \quad (35.7)$$

Запишем систему интегральных уравнений, эквивалентную задаче (35.2), (35.1):

$$\begin{cases} R(t) = \frac{R'(0)}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \theta) F\left(\theta, \varepsilon, R(\theta), \frac{dR}{d\theta}(\theta)\right) d\theta, \\ \frac{dR}{dt}(t) = R'(0) \cos \omega t + \int_0^t \cos \omega(t - \theta) F\left(\theta, \varepsilon, R(\theta), \frac{dR}{d\theta}(\theta)\right) d\theta. \end{cases} \quad (35.8)$$

Метод последовательных приближений состоит в последовательном вычислении функций  $R_i(t)$ ,  $\frac{dR_i}{dt}(t)$  по формулам

$$\begin{cases} R_{i+1}(t) = \frac{R'_i(0)}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \theta) F\left(\theta, \varepsilon, R_i(\theta), \frac{dR_i}{d\theta}(\theta)\right) d\theta, \\ \frac{dR_{i+1}}{dt}(t) = R'_i(0) \cos \omega t + \int_0^t \cos \omega(t - \theta) F\left(\theta, \varepsilon, R_i(\theta), \frac{dR_i}{d\theta}(\theta)\right) d\theta, \\ R_0(t) = 0, \quad \frac{dR_0}{dt}(t) = 0. \end{cases} \quad i \geq 0, \quad (35.9)$$

Обозначим  $z_i(t) = |R_i(t)| + \left| \frac{dR_i}{dt}(t) \right|$ , так что  $z_0(t) \equiv 0$  при  $t \in [0; \varepsilon^{-1}L]$ .

В силу соотношения (35.1) и оценок (35.6)

$$\begin{aligned} z_{i+1} &\leq M\varepsilon^{N+1} + (1 + \omega^{-1}) \int_0^t \left| F(\theta, \varepsilon, R_i(\theta), \frac{dR_i}{d\theta}(\theta)) \right| d\theta \leq \\ &\leq M\varepsilon^{N+1} + (1 + \omega^{-1}) \int_0^t (M_2\varepsilon^{N+1} + M_2\varepsilon z_i(\theta)) d\theta \leq \\ &\leq M\varepsilon^{N+1} + (1 + \omega^{-1}) M_2\varepsilon^{N+1} \varepsilon^{-1} L + M_4\varepsilon \int_0^t z_i(\theta) d\theta \leq \\ &\leq M_3\varepsilon^N + M_4\varepsilon \int_0^t z_i(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Следовательно,  $z_1 \leq M_3\varepsilon^N < 1$  при всех  $t \in [0; \varepsilon^{-1}L]$  и достаточно малых  $\varepsilon$ .

Так как на отрезке  $t \in [0; \varepsilon^{-1}L]$  выполнено условие  $z_1 < 1$ , то на этом отрезке справедливы и неравенства (35.6), (35.7). Итак,

$$z_2 \leq M_3 \varepsilon^N + M_4 \varepsilon \int_0^t M_3 \varepsilon^N d\theta = M_3 \varepsilon^N + M_2 M_3 \varepsilon^{N+1} t \leq \\ \leq M_3 \varepsilon^N (1 + M_4 L) < M_3 \varepsilon^N e^{M_4 L} = M_5 \varepsilon^N < 1$$

при всех  $t \in [0; \varepsilon^{-1}L]$  и  $\varepsilon < \varepsilon_0 = \sqrt[N]{1/M_5}$ ;

$$z_3 \leq M_3 \varepsilon^N + M_4 \varepsilon \int_0^t (M_3 \varepsilon^N + M_4 M_3 \varepsilon^{N+1} \theta) d\theta = \\ = M_3 \varepsilon^N \left( 1 + M_4 \varepsilon t + \frac{(M_4 \varepsilon t)^2}{2} \right) < M_3 \varepsilon^N e^{M_4 L} = M_5 \varepsilon^N < 1.$$

Далее по индукции легко проверяется, что

$$z_i \leq M_3 \varepsilon^N \left( 1 + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(M_4 \varepsilon t)^j}{j!} \right) < M_3 \varepsilon^N e^{M_4 \varepsilon t} \leq M_3 \varepsilon^N e^{M_4 L} = M_5 \varepsilon^N < 1$$

при всех  $t \in [0; \varepsilon^{-1}L]$  и  $\varepsilon < \varepsilon_0$ .

Итак, неравенство  $|R_i(t)| + \left| \frac{dR_i}{dt}(t) \right| < M_5 \varepsilon^N$  доказано для всех  $i \geq 0$ ,  $t \leq \varepsilon^{-1}L$ .

Аналогично проведенной выше оценке доказывается равномерная сходимость функций  $R_i(t)$  и их производных на отрезке  $[0; \varepsilon^{-1}L]$ . Для этого достаточно рассмотреть

$$\psi_i(t) = |R_{i+1}(t) - R_i(t)| + \left| \frac{dR_{i+1}}{dt}(t) - \frac{dR_i}{dt}(t) \right| \quad \text{при } i \geq 0.$$

Из оценок, рассмотренных выше, следует, что  $\psi_0(t) = z_1(t) \leq M_3 \varepsilon^N$ .

Из (35.7), (35.9) вытекает неравенство  $\psi_{i+1}(t) \leq M_2 \varepsilon \int_0^t \psi_i(\theta) d\theta$  при  $i \geq 0$ . По индукции получаем оценку:  $\psi_i(t) \leq M_3 \varepsilon^N \frac{(M_4 \varepsilon t)^j}{j!}$ .

Поэтому ряды

$$R_0(t) + \sum_{j=0}^{\infty} (R_{j+1}(t) - R_j(t)) \quad \text{и} \quad \frac{dR_0(t)}{dt} + \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{dR_{j+1}}{dt}(t) - \frac{dR_j}{dt}(t) \right)$$

мажорируются рядом  $M_3 \varepsilon^N \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(M_4 \varepsilon t)^j}{j!} = M_3 \varepsilon^N e^{M_4 L}$  и, следовательно, при  $i \rightarrow \infty$  равномерно сходятся к  $R(t)$  и  $\frac{dR(t)}{dt}$  соответственно.

Предельные функции, очевидно, удовлетворяют системе (35.8) и

$$\left| R(t) + \frac{dR(t)}{dt} \right| < M_5 \varepsilon^N.$$

Тем самым доказаны существование решения задачи (34.1), (34.2) на отрезке  $[0; \varepsilon^{-1} L]$  и оценка

$$\left| u_{\varepsilon}(t) - \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon t) \right| < M_5 \varepsilon^N.$$

Вследствие произвольности номера  $N$  тот факт, что в получившейся оценке вместо  $N + 1$  стоит  $N$ , несуществен (см. эквивалентность определений асимптотического ряда § 2, теорема 2.3). ▼

**З а м е ч а н и е 1.** Необязательно требовать гладкости функции  $f(u, v)$  на всей плоскости. Достаточно потребовать этого лишь в некоторой окрестности значений  $u_0(t, \tau)$  и  $\frac{du_0}{dt}(t, \tau)$ . Вместо бесконечной дифференцируемости также можно ограничиться лишь конечным числом производных функции  $f(u, v)$ . В этом случае, разумеется, вместо бесконечного асимптотического ряда будет лишь асимптотическое приближение из конечного числа слагаемых.

**З а м е ч а н и е 2.** Все построения и основная теорема справедливы и для того случая, когда правая часть уравнения (34.1) имеет вид  $\varepsilon f(u, \frac{du}{dt}, \varepsilon)$ , где  $f$  — гладкая функция своих аргументов, а начальные значения (34.2) также гладко зависят от  $\varepsilon$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Решение и его асимптотическое разложение построены на отрезке порядка  $\varepsilon^{-1}$ . На большем отрезке, вообще говоря, не существует решения задачи (34.1), (34.2). Но даже если оно существует, исследование его асимптотики требует привлечения других методов (см., например, [8]).

**З а м е ч а н и е 4.** После замены  $\tau = \varepsilon t$  задача (34.1), (34.2) переходит в задачу на конечном отрезке для уравнения с малым параметром при старшей производной:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} + \omega^2 u = \varepsilon f\left(u, \varepsilon \frac{du}{d\tau}\right), \quad 0 \leq \tau \leq L.$$

Тем самым исследования этой главы перекликаются с исследованиями предыдущей и последующей глав.

В качестве примера рассмотрим известное уравнение Ван дер Поля

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = \varepsilon(1 - u^2) \frac{du}{dt}, \quad (35.10)$$

которое при определенных условиях описывает колебания в электронных генераторах [3]. Если  $\varepsilon \ll 1$ , то к уравнению Ван дер Поля применима рассмотренная выше теория.

Здесь  $f(u, v) = (1 - u^2)v$ , при малых  $\varepsilon > 0$  кривые на фазовой плоскости  $\left(u, \frac{du}{dt}\right)$  — это медленно изменяющиеся «окружности», изображенные на рис. 18. Однако очень трудно из вида возмущения  $\varepsilon(1 - u^2)v$ , угадать, как будет вести себя эта кривая при больших значениях времени.

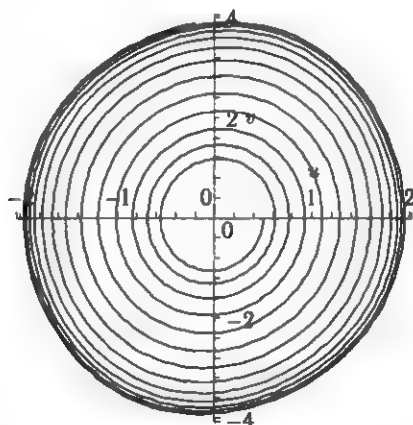


Рис. 18. Фазовый портрет решений уравнения Ван дер Поля

Тем не менее доказанная выше теорема сразу дает ответ на этот вопрос. Система уравнений (34.15), (34.16) для данного примера имеет следующий вид:

$$2\pi\omega A'(\tau) = - \int_0^{2\pi} (1 - A^2(\tau) \cos^2 \psi) (-\omega A(\tau) \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad .$$

$$2\pi\omega A(\tau) B'(\tau) = - \int_0^{2\pi} (1 - A^2(\tau) \cos^2 \psi) (-\omega A(\tau) \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

Из первого уравнения имеем

$$2A'(\tau) = A(\tau) - \frac{A(\tau)^3}{4},$$

из второго уравнения —  $B'(\tau) = 0$ . Начальные условия (34.14) определяют

$$B(\tau) = \text{const} = -\arctg \frac{b}{a\omega}, \quad A(0) = \beta = \sqrt{a^2 + b^2\omega^{-2}}.$$

Решение уравнения для  $A(\tau)$  записывается через элементарные функции:

$$\frac{dA^2(\tau)}{d\tau} = A^2(\tau) - \frac{A(\tau)^4}{4}, \quad A^2 = z, \quad \tau = \int_{\beta^2}^{A^2} \frac{4dz}{z(4-z)},$$

$$A(\tau) = \frac{2\beta e^{\tau/2}}{\sqrt{\beta^2(e^\tau - 1) + 4}}.$$

Итак, на отрезке  $[0; \varepsilon^{-1}L]$  решение уравнения (35.10) с начальными условиями (34.2) равно  $A(t/\varepsilon) \cos(\omega t + B) + O(\varepsilon)$ , где функция  $A(\tau)$  и постоянная  $B$  выписаны выше. Любопытно, что независимо от начальных данных амплитуда  $A(\tau) \rightarrow 2$  при  $\tau \rightarrow \infty$  (см. рис. 18.)

Из уравнений (34.20) для  $C_1(\tau)$ ,  $D_1(\tau)$  и из аналогичных уравнений для  $C_k(\tau)$ ,  $D_k(\tau)$  можно явно в квадратурах найти все следующие члены асимптотического разложения решения задачи (35.10), (34.2). Так как в данном примере уравнение для  $A(\tau)$  разрешимо для всех  $\tau$ , то постоянную  $L$  можно выбрать любой сколь угодно большой (но фиксированной!). При  $t \approx \varepsilon^{-2}$  построенный ряд уже не приближает решения задачи (35.10), (34.2). Для того чтобы получить равномерное приближение решения при  $t \approx \varepsilon^{-2}$ , требуются более сложные алгоритмы [7, 8].



## Глава 10

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

### § 36. Постановка задачи. Построение предельного решения

Большое число прикладных задач связано с изучением сплошных сред, у которых наблюдаются частые изменения свойств материала. Многие из них описываются дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых испытывают быстрые колебания. Наиболее частые применения такой теории относятся к исследованию поведения так называемых композитных материалов, состоящих из чередующихся материалов с разными свойствами.

Значительное число публикаций за последние 30 лет относится к математическим аспектам данной проблемы. Познакомиться с глубокими результатами по этой теме можно по монографиям [2, 5, 11, 13, 14, 18].

Здесь мы рассмотрим простейшую модельную нелинейную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dx} \left( a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du}{dx} \right) + \frac{d}{dx} (p(u)) + q \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) u = f \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (36.1)$$

$$u(0) = u(l) = 0, \quad (36.2)$$

где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $a(\xi)$ ,  $q(x, \xi)$ ,  $f(x, \xi)$  — гладкие периодические функции с периодом 1 по переменной  $\xi$ , а функция  $a(\xi)$ , кроме того, строго положительна.

Будем всюду считать, что  $\varepsilon = \frac{l}{N}$ , где  $N$  — большое натуральное число.

Так же как в предыдущей главе, будем искать решение как функцию от двух независимых переменных: медленной переменной  $x$  и быстрой переменной  $\xi \equiv \frac{x}{\varepsilon}$ . В этом случае

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi},$$

а уравнение (36.1) для функции  $u(x, \xi)$  приобретает следующий вид:

$$a(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2a(\xi)}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \xi} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\varepsilon} a'(\xi) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p(u)}{\partial x} + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} (p(u)) + q(x, \xi)u = f(x, \xi). \quad (36.3)$$

Как и ранее, будем искать решение задачи в виде ряда:

$$u(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, \xi). \quad (36.4)$$

Подставим этот ряд в уравнение (36.3) и приравняем коэффициенты при всех степенях  $\varepsilon$ . При этом будем требовать, чтобы все функции  $u_k(x, \xi)$  были периодичны по переменной  $\xi$  с периодом 1.

Коэффициент при  $\varepsilon^{-2}$  равен

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right) = 0,$$

следовательно,

$$a(\xi) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} = C(x).$$

Функция  $a(\xi)$  положительна, поэтому, если  $C(x) \neq 0$ , то функция  $u_0(x, \xi)$  либо строго возрастает, либо строго убывает по переменной  $\xi$ . В этом случае она не может быть периодической по переменной  $\xi$ . Следовательно,  $C(x) = 0$  и  $u_0(x, \xi) \equiv u_0(x)$ .

Представим функцию  $p(u)$  в виде ряда Тейлора:

$$p(u) = p(u_0(x)) + p'(u_0(x))[\varepsilon u_1(x, \xi) + \varepsilon^2 u_2(x, \xi) + \dots] + \\ + \frac{p''(u_0(x))}{2} [\varepsilon u_1(x, \xi) + \varepsilon^2 u_2(x, \xi) + \dots]^2 + \dots$$

Приравнивая коэффициенты при  $\varepsilon^{-1}$  и учитывая, что  $u_0(x, \xi) \equiv u_0(x)$ , получаем уравнение

$$a'(\xi) \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Следовательно,

$$a(\xi) \frac{du_0}{dx} + a(\xi) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = B_0(x),$$

где  $B_0(x)$  — пока неизвестная функция.

Если разделить обе части последнего равенства на  $a(\xi)$  и найти их среднее по отрезку  $[0; 1]$ , то, поскольку в силу периодичности среднее функции  $\frac{\partial u_1}{\partial \xi}$  равно нулю, получим равенство

$$\frac{du_0}{dx} = \mu B_0(x), \quad \text{т. е.} \quad B_0(x) = \frac{1}{\mu} \frac{du_0}{dx},$$

где  $\mu = \int_0^1 [a(\xi)]^{-1} d\xi$ . Поэтому

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \beta(\xi) \frac{du_0}{dx},$$

где

$$\beta(\xi) = \frac{1}{\mu a(\xi)} - 1, \quad \int_0^1 \beta(\xi) d\xi = 0. \quad (36.5)$$

Тогда

$$u_1(x, \xi) = \gamma(\xi) \frac{du_0}{dx} + A_1(x),$$

$$\frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial x} = \gamma(\xi) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + A'_1(x),$$

где  $A_1(x)$  — опять-таки пока неизвестная функция, а

$$\gamma(\xi) = \int_0^\xi \beta(s) ds. \quad (36.6)$$

Приравнивая коэффициенты при  $\epsilon^0$ , получаем уравнение

$$a(\xi) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + 2a(\xi) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right) + a'(\xi) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{dp(u_0)}{dx} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi} (p'(u_0) u_1) + q(x, \xi) u_0 = f(x, \xi). \quad (36.7)$$

Далее возьмем среднее от обеих частей полученного уравнения, обозначая через  $[\cdot]_{\text{cp}}$  интеграл по  $\xi$  по отрезку  $[0; 1]$ . Если еще учесть, что

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \xi} = \beta(\xi) \frac{d^2 u_0}{dx^2},$$

то получим равенство

$$[a]_{\text{cp}} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + [2a\beta]_{\text{cp}} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + [a'\gamma]_{\text{cp}} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{dp(u_0)}{dx} + [q(x, \xi)]_{\text{cp}} u_0 =$$

$$= [f(x, \xi)]_{\text{cp}}.$$

Так как

$$\begin{aligned}
 [a + 2a\beta + a'\gamma]_{\text{cp}} &= \int_0^1 \left( a(s) + \frac{2}{\mu} - 2a(s) + a'(s)\gamma(s) \right) ds = \\
 &= \frac{2}{\mu} - \int_0^1 a(s) ds + a(s)\gamma(s) \Big|_0^1 - \int_0^1 a(s)\beta(s) ds = \\
 &= \frac{2}{\mu} - \int_0^1 a(s) ds - \int_0^1 a(s) \left( \frac{1}{\mu a(s)} - 1 \right) ds = \frac{1}{\mu},
 \end{aligned}$$

то в результате получаем уравнение для  $u_0(x)$ :

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{dp(u_0)}{dx} + [q(x, \xi)]_{\text{cp}} u_0 = [f(x, \xi)]_{\text{cp}}. \quad (36.8)$$

Под функцией  $u_0(x)$  будем понимать далее решение уравнения (36.8) с граничными условиями (36.2). (Вопрос о существовании и единственности такого решения будет рассмотрен позднее, а пока будем считать, что функция  $u_0(x)$  определена.)

### § 37. Построение формальной асимптотики

Далее будем строить последовательно все члены асимптотического разложения (36.4). Для этого снова обратимся к уравнению (36.7). Заметим, что в этом уравнении уже получены некоторые слагаемые. Обозначим уже определенную функцию

$$\begin{aligned}
 g_{1,1}(x, \xi) &= a(\xi) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + 2a(\xi) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \xi} + a'(\xi) \gamma(\xi) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \\
 &+ \frac{dp(u_0)}{dx} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( p'(u_0) \gamma(\xi) \frac{du_0}{dx} \right) + q(x, \xi) u_0 - f(x, \xi) = \\
 &= (a(\xi) + 2a(\xi)\beta(\xi) + a'(\xi)\gamma(\xi)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{dp(u_0)}{dx} + \\
 &+ p'(u_0)\beta(\xi) \frac{du_0}{dx} + q(x, \xi) u_0 - f(x, \xi).
 \end{aligned}$$

Из уравнения (36.7) следует, что

$$[g_{1,1}(x, \xi)]_{\text{cp}} = 0, \quad \text{а} \quad g_{1,1}(x, \xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right) + a'(\xi) A'_1(x) = 0.$$

Следовательно,

$$a(\xi) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + a(\xi) A'_1(x) = g_{2,1}(x, \xi) + B_1(x) = - \int_0^\xi g_{1,1}(x, s) ds + B_1(x),$$

где  $g_{2,1}(x, \xi)$  — уже определенная функция,  $g_{2,1}(x, 0) = g_{2,1}(x, 1) = 0$ , а  $B_1(x)$  — пока еще не определенная функция от  $x$ .

И в дальнейшем посредством  $g_{i,k}(x, \xi)$ ,  $g_k(x, \xi)$  и  $h_k(x)$  будем обозначать функции, которые уже определены к данному этапу построения коэффициентов ряда (36.4). Таким образом,

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi} = \frac{1}{a(\xi)} g_{2,1}(x, \xi) - A'_1(x) + \frac{1}{a(\xi)} B_1(x).$$

После осреднения этого равенства получаем соотношение  $A'_1(x) = \mu B_1(x) + h_1(x)$ , где  $h_1(x) = \left[ \frac{1}{a(\xi)} g_{2,1}(x, \xi) \right]_{\text{cp}}$ . Следовательно,

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi} = \beta(\xi) A'_1(x) + \frac{1}{a(\xi)} g_{2,1}(x, \xi) - \frac{h_1}{a(\xi)\mu} = \beta(\xi) A'_1(x) + g_{3,1}(x, \xi),$$

где  $[g_{3,1}(x, \xi)]_{\text{cp}} = 0$ , а  $\beta$  определяется формулой (36.5).

Положим  $u_2(x, \xi) = \gamma(\xi) A'_1(x) + A_2(x) + g_{4,1}(x, \xi)$ , где  $\gamma$  задано формулой (36.6), а

$$g_{4,1}(x, \xi) = \int_0^\xi g_{3,1}(x, \zeta) d\zeta, \quad g_{4,1}(x, 0) = g_{4,1}(x, 1) = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \gamma(\xi) A''_1(x) + A'_2(x) + g_{5,1}(x, \xi).$$

Теперь можно приступать к определению  $A_1(x)$  и, тем самым, к определению  $u_1(x, \xi)$  — следующего члена ряда (36.4).

Для этого в уравнении (36.3) приравняем коэффициенты при  $\epsilon$ :

$$a(\xi) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2a(\xi) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi) \frac{\partial u_3}{\partial \xi} \right) + a'(\xi) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{d(p'(u_0)u_1)}{dx} + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( p'(u_0)u_2 + \frac{p''(u_0(x))}{2} [u_1(x, \xi)]^2 \right) + q(x, \xi)u_1 = 0. \quad (37.1)$$

Подставим в это равенство полученные выражения для  $u_1(x, \xi)$ ,  $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial \xi}$ ,  $\frac{\partial u_2}{\partial x}$  и, проводя осреднение, получим равенство

$$[a + 2a\beta + a'\gamma]_{\text{cp}} A''_1(x) + \frac{d(p'(u_0)A_1(x))}{dx} + [q(x, \xi)]_{\text{cp}} A_1 = g_1(x),$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{\mu} A''_1(x) + \frac{d(p'(u_0)A_1(x))}{dx} + [q(x, \xi)]_{\text{cp}} A_1 = g_1(x).$$

Граничные условия для функции  $A_1(x)$  имеют следующий вид:  $A_1(0) = A_1(1) = 0$ , так как второй член разложения  $u_1(x, \xi)$  должен равняться нулю на концах отрезка,  $u_1(x, \xi) = A_1(x) + \gamma(\xi) \frac{du_0}{dx}$ , а  $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$ .

Итак, уже построены функции  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ , выяснено, что

$$u_2(x) = A_2(x) + g_{0,2}(x, \xi), \quad g_{0,2}(x, 0) = g_{0,2}(x, 1) = 0,$$

где  $A_2(x)$  — пока еще не определенная функция, и уравнение (36.3) после подстановки ряда (36.4) справедливо с точностью до  $\varepsilon$ . Кроме того, уравнение (37.1), которое получается приравнованием коэффициентов при  $\varepsilon$ , имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (a(\xi) \frac{\partial u_3}{\partial \xi}) + a'(\xi) \frac{\partial A_2}{\partial x} = g_{1,2}(x, \xi) \quad \text{и} \quad [g_{1,2}(x, \xi)]_{\text{cp}} = 0.$$

Далее построение функций  $u_k(x, \xi)$  проводится по индукции. Пусть все коэффициенты  $u_j(x, \xi)$  при  $j \leq k-1$  определены таким образом, что после подстановки ряда (36.4) в уравнение (36.3) оно обращается в тождество с точностью до  $O(\varepsilon^{k-1})$ . Кроме того, пусть известно, что

$$u_k(x, \xi) = A_k(x) + g_{0,k}(x, \xi), \quad g_{0,k}(x, 0) = g_{0,k}(x, 1) = 0, \quad (37.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi) \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \xi} \right) + a'(\xi) \frac{\partial A_k}{\partial x} = g_{1,k}(x, \xi), \quad (37.3)$$

$$[g_{1,k}(x, \xi)]_{\text{cp}} = 0. \quad (37.4)$$

(На данном этапе эти условия выполнены при  $k=2$ .)

Из равенства (37.3) следует, что

$$a(\xi) \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \xi} + a(\xi) A'_k(x) = B_k(x) + g_{2,k}(x, \xi), \quad g_{2,k}(x, 0) = g_{2,k}(x, 1) = 0.$$

Так же как и ранее, после деления на  $a(\xi)$  и осреднения получается равенство

$$A'_k(x) = \mu B_k(x) + h_k(x).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_{k+1}}{\partial \xi} = \left( \frac{1}{\mu a(\xi)} - 1 \right) A'_k(x) + g_{4,k}(x, \xi) = \beta(\xi) A'_k(x) + g_{3,k}(x, \xi),$$

$$[g_{3,k}(x, \xi)]_{\text{cp}} = 0,$$

$$u_{k+1} = \gamma(\xi) A'_k(x) + A_{k+1}(x) + g_{4,k}(x, \xi), \quad g_{4,k}(x, 0) = g_{4,k}(x, 1) = 0. \quad (37.5)$$

Далее будем опускать индексы у ранее определенных функций  $g$  в тех случаях, когда нет необходимости уточнять какие-либо их свойства:

$$\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x} = \gamma(\xi) A''_k(x) + A'_{k+1}(x) + g(x, \xi),$$

где  $\gamma(\xi)$  определено формулой (36.6).

После дифференцирования этого равенства по  $x$  получаем следующее соотношение:

$$\frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial x \partial \xi} = \beta A_k''(x) + g(x, \xi).$$

После подстановки ряда (36.4) в уравнение (36.3) и приравнивания в обеих частях уравнения коэффициентов при  $\epsilon^k$  получается равенство

$$\begin{aligned} a(\xi) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + 2a(\xi) \frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi) \frac{\partial u_{k+2}}{\partial \xi} \right) + a'(\xi) \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( p'(u_0) u_k \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( p'(u_0) u_{k+1} + \frac{p''(u_0(x))}{2} [2u_1 u_k + \dots] + \dots \right) + \\ + q(x, \xi) u_k = g_{5,k}(x, \xi). \end{aligned}$$

Если в это равенство подставить полученные значения  $u_k$ ,  $\frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial x \partial \xi}$ ,  $\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}$  и осреднить уравнение, то получится равенство

$$[a + 2a\beta + a'\gamma]_{\text{cp}} A_k''(x) + \frac{d(p'(u_0)A_k(x))}{dx} + [q(x, \xi)]_{\text{cp}} A_k = g_k(x),$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{\mu} A_k''(x) + \frac{d(p'(u_0)A_k(x))}{dx} + [q(x, \xi)]_{\text{cp}} A_k = g_k(x).$$

Граничные условия для функции  $A_k(x)$  такие же, как и для  $A_1(x)$ :

$$u_k(x, \xi) = A_k(0) + g_{0,k}(x, \xi), \quad A_1(0) = A_1(l) = 0.$$

Тем самым определена функция  $u_{k+1}(x, \xi)$  и для нее выполнены условия (37.2)–(37.4) с заменой  $k$  на  $k+1$ .

Поэтому далее процесс можно продолжать неограниченно и построить все функции вплоть до  $u_n(x, \xi)$ , так что частичная сумма ряда будет удовлетворять уравнению (36.1) и краевым условиям (36.2) с точностью до  $O(\epsilon^{n+1})$ .

## § 38. Существование и единственность решения.

### Оценка решения. Обоснование асимптотики

Всюду в этом параграфе будем считать функции  $a(\xi)$ ,  $p(u)$ ,  $q(x, \xi)$  и  $f(x, \xi)$  бесконечно дифференцируемыми, периодическими по переменной  $\xi$  с периодом 1 и, кроме того,  $a(x, \xi) > \nu > 0$ ,  $q(x, \xi) \leq 0$ ,  $\xi = \epsilon x$ ,  $\epsilon = N^{-1} \cdot l$ ,  $N$  — большое натуральное число,  $\nu$  — положительная постоянная.

Прежде всего укажем априорную оценку решения задачи (36.1), (36.2) в предположении существования решения. Будем рассматривать немного более общее уравнение

$$\frac{d}{dx} \left( a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du}{dx} \right) + \alpha \frac{d}{dx} (p(u)) + q \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) u = f \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (38.1)$$

$$u(0) = u(l) = 0, \quad (38.2)$$

где  $\alpha \geq 0$  — какая-нибудь постоянная.

**Лемма 38.1.** Для решения уравнения (38.1) с граничными условиями (38.2) при любых значениях параметра  $\alpha$  справедлива оценка

$$\int_0^l \left( \frac{du}{dx}(x) \right)^2 dx \leq \frac{4l^2}{\nu^2} \int_0^l \left[ f \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right]^2 dx. \quad (38.3)$$

**Доказательство.** Умножим обе части уравнения (38.1) на решение  $u(x)$ , проинтегрируем по отрезку  $[0; l]$  и проведем интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} - \int_0^l a(\xi) (u'(x))^2 dx + \int_0^l \alpha u \frac{d}{dx} (p(u(x))) dx + \int_0^l q(x, \xi) u^2(x) dx = \\ = \int_0^l u(x) f(x, \xi) dx. \end{aligned}$$

Пусть  $G(u)$  — первообразная функции  $p(u)$ , так что  $G'(u) = p(u)$ . Тогда

$$\int_0^l u \frac{d}{dx} (p(u)) dx = - \int_0^l p(u) \frac{du}{dx} dx = -G(u) \Big|_0^l = 0.$$

Так как  $q(x, \xi) \leq 0$ , то при любом значении постоянной  $\alpha$  и любом  $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq \nu \int_0^l \left( \frac{du}{dx}(x) \right)^2 dx &\leq \int_0^l a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \left( \frac{du}{dx}(x) \right)^2 dx = \\ &= \int_0^l q \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) u^2(x) dx - \int_0^l u(x) f \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \leq - \int_0^l u(x) f \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \leq \\ &\leq \sqrt{\int_0^l u^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_0^l f^2 \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx} \leq \gamma \int_0^l u^2(x) dx + \gamma^{-1} \int_0^l f^2 \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx. \end{aligned}$$



Тем самым справедливо неравенство

$$\nu \int_0^l \left( \frac{du}{dx}(x) \right)^2 dx \leq \gamma \int_0^l u^2(x) dx + \gamma^{-1} \int_0^l \left[ f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right]^2 dx \quad (38.4)$$

при любой положительной постоянной  $\gamma$ .

Далее воспользуемся хорошо известной оценкой нормы функции в  $L_2$  через такую же норму ее производной. Если  $v(0) = 0$ , то

$$v(x) = \int_0^x v'(s) ds, \quad |v(x)|^2 \leq \int_0^x 1^2 ds \int_0^x v'(s)^2 ds \leq l \int_0^l v'(s)^2 ds, \quad (38.5)$$

$$\int_0^l v^2(x) dx \leq l^2 \int_0^l v'(x)^2 dx. \quad (38.6)$$

Поэтому из неравенства (38.4) получится следующее неравенство:

$$\nu \int_0^l \left( \frac{du}{dx}(x) \right)^2 dx \leq \gamma l^2 \int_0^l \left( \frac{du}{dx}(x) \right)^2 dx + \gamma^{-1} \int_0^l \left[ f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right]^2 dx.$$

Если в этом неравенстве положить  $\gamma = \frac{\nu}{2l^2}$ , то получим оценку (38.3). ▼

Эта оценка при  $\alpha = 0$ , т.е. для линейного уравнения, гарантирует единственность решения при  $f = 0$ , а значит, и существование решения задачи (38.1), (38.2), если  $\alpha = 0$ .

**Л е м м а 38.2.** *Существует единственное решение задачи (38.1), (38.2) при всех достаточно малых  $\alpha$ .*

**Доказательство.** Запишем уравнение (38.1) в виде

$$\frac{d}{dx} \left( a(\xi) \frac{du}{dx} \right) + q(x, \xi)u = f(x, \xi) - \alpha \frac{d}{dx}(p(u)). \quad (38.7)$$

В пространстве функций  $W_2^1[0; l]$  с нормой  $\sqrt{\int_0^l (u'^2(x) + u^2(x)) dx}$  рассмотрим шар  $S_M = \|u\|_{W_2^1[0; l]} \leq M$ , где постоянную  $M$  выберем позднее. Определим оператор  $A: S_M \rightarrow W_2^1[0; l]$  следующим образом:  $u \equiv Av$ , если  $u(x)$  является решением линейного уравнения

$$\frac{d}{dx} \left( a(\xi) \frac{du}{dx} \right) + q(x, \xi)u = f(x, \xi) - \alpha \frac{d}{dx}(p(v)), \quad (38.8)$$

удовлетворяющим условиям (36.2). Тогда решение задачи (38.1), (38.2) есть неподвижная точка этого оператора.

Покажем, что можно выбрать постоянные  $M$  и  $\alpha$  так, чтобы оператор  $A$  переводил шар  $S_M$  в себя и был сжимающим.

Применим к уравнению (38.8) неравенство (38.3):

$$\begin{aligned} \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L_2}^2 &\leq \frac{4l^2}{\nu^2} \int_0^l \left( f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \alpha \frac{d}{dx}(p(v)) \right)^2 dx \leq \\ &\leq \frac{8l^2}{\nu^2} \left( \|f\|_{L_2}^2 + \alpha^2 \left\| p'(v) \frac{dv}{dx} \right\|_{L_2}^2 \right). \end{aligned}$$

Из неравенства (38.5) вытекает, что в шаре  $S_M$  справедливы оценки

$$|v(x)| \leq \sqrt{l} M, \quad |p'(v(x))| \leq M_1.$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L_2}^2 \leq \frac{8l^2}{\nu^2} \left( \|f\|_{L_2}^2 + \alpha^2 M_1^2 M^2 \right).$$

Так как в силу (38.5)  $|u(x)|^2 \leq l \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L_2}^2$ , то

$$\|Av\|_{W_2^1[0,l]}^2 \leq (1 + l^2) \frac{8l^2}{\nu^2} \left( \|f\|_{L_2}^2 + \alpha^2 M_1^2 M^2 \right) < M^2,$$

если выбрать  $M$  достаточно большим, а  $\alpha$  достаточно малым. Поэтому оператор  $A$  переводит шар  $S_M$  в себя.

Аналогичные оценки показывают, что при достаточно малом  $\alpha$  оператор  $A$  является сжимающим. Действительно, пусть  $u_1 = Av_1$ ,  $u_2 = Av_2$ , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( a(\xi) \frac{du_1}{dx} \right) + q(x, \xi) u_1 &= f(x, \xi) - \alpha \frac{d}{dx}(p(v_1)), \\ \frac{d}{dx} \left( a(\xi) \frac{du_2}{dx} \right) + q(x, \xi) u_2 &= f(x, \xi) - \alpha \frac{d}{dx}(p(v_2)). \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{d}{dx} \left( a(\xi) \frac{d(u_1 - u_2)}{dx} \right) + q(x, \xi)(u_1 - u_2) = \alpha \frac{d}{dx}(p(v_2) - p(v_1)).$$

Умножим обе части этого равенства на  $u_1 - u_2$ , возьмем интегралы от 0 до  $l$  и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} - \int_0^l a(\xi) (u_1' - u_2')^2 dx + \int_0^l q(x, \xi) (u_1 - u_2)^2 dx &= \\ &= \int_0^l \alpha (p(v_1) - p(v_2)) (u_1' - u_2') dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\nu \|u_1 - u_2\|_{W_2^1[0;l]}^2 \leq \alpha \max_{v \in S_M} |p'(v)| \int_0^l |v_1(x) - v_2(x)| \cdot |u_1'(x) - u_2'(x)| dx.$$

Так как  $\max_{v \in S_M} |p'(v)| \leq M_1$  а  $\|v\|_{L_2^1[0;l]} \leq l \|v\|_{W_2^1[0;l]}$ , то

$$\nu \|u_1 - u_2\|_{W_2^1[0;l]}^2 \leq \alpha M_1 l \|v_1 - v_2\|_{W_2^1[0;l]} \cdot \|u_1 - u_2\|_{W_2^1[0;l]},$$

откуда вытекает, что при достаточно малом положительном  $\alpha$  оператор  $A$  сжимающий и, следовательно, задача (38.1), (36.2) имеет единственное решение. ▼

Хотя доказано только то, что построенное решение принадлежит классу  $W_2^1[0;l]$ , т. е. его первая производная суммируема с квадратом, а следовательно, само решение непрерывно, но непосредственно из уравнения (38.1) вытекает, что вторая производная решения тоже суммируема с квадратом. Опять же из уравнения следует, что и третья производная суммируема с квадратом. Продолжая эти рассуждения, приходим к тому, что построенное решение бесконечно дифференцируемо.

Процесс построения асимптотического разложения и оценка решения задачи (38.1), (36.2) справедливы для любого  $\alpha$ . Тем не менее для того чтобы избежать дополнительных осложнений, дальнейшее доказательство будет проведено лишь для достаточно малых  $\alpha$ .

**Теорема 38.1.** Пусть  $u_\varepsilon(x)$  — решение задачи (38.1), (36.2), а

$$\hat{u}_n(x, \xi) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x, \xi)$$

— частичная сумма ряда (36.4), построенного в § 37 (с естественной заменой уравнения (36.1) на уравнение (38.1)). Тогда существует  $\alpha_0 > 0$ , такое что при  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$  справедлива оценка

$$u_\varepsilon(x) - \hat{u}_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon^{n+1}),$$

равномерная на всем отрезке  $[0;l]$ .

**Доказательство.** Из построения функций  $u_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( a(\xi) \frac{d\hat{u}_n(x, \xi)}{d\xi} \right) + \alpha \frac{d}{d\xi} (p(\hat{u}_n(x, \xi))) + q(x, \xi) \hat{u}_n(x, \xi) - f(x, \xi) = \\ = \varphi(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}) \end{aligned}$$

равномерно при  $x \in [0; l]$ . Из этого равенства и из уравнения (38.1) следует соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( a(\xi) \frac{d(\hat{u}_n(x, \xi) - u_\varepsilon(x))}{dx} \right) + \alpha \frac{d}{dx} \left( (p(\hat{u}_n(x, \xi)) - p(u_\varepsilon(x))) \right) + \\ + q(x, \xi)(\hat{u}_n(x, \xi) - u_\varepsilon(x)) = \varphi_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^{n+1}) \quad (38.9) \end{aligned}$$

равномерно при  $x \in [0; l]$ .

Обозначим  $v_n = \hat{u}_n(x, \xi) - u_\varepsilon(x)$ , умножим обе части уравнения (38.9) на  $v_n$ , проинтегрируем по отрезку  $[0; l]$  и преобразуем некоторые интегралы путем интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} - \int_0^l a(\xi) (v'_n)^2 dx - \int_0^l \alpha v'_n \cdot (p(\hat{u}_n) - p(u_\varepsilon)) dx + \int_0^l q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) v_n^2 dx = \\ = \int_0^l v_n \varphi_\varepsilon(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом отрицательности  $q(x, \xi)$

$$\begin{aligned} 0 \leq \nu \|v'_n\|_{L_2[0;l]}^2 &\leq \int_0^l a(\xi) (v'_n)^2 dx - \int_0^l q(x, \xi) v_n^2 dx = \\ &= -\alpha \int_0^l v'_n \cdot (p(\hat{u}_n) - p(u_\varepsilon)) dx - \int_0^l v_n \varphi_\varepsilon(x) dx \leq \\ &\leq \alpha \int_0^l |v'_n| \cdot |p(\hat{u}_n) - p(u_\varepsilon)| dx + \int_0^l |v_n \varphi_\varepsilon(x)| dx. \end{aligned}$$

Как это выяснено при доказательстве леммы 38.2,

$$\|u(x)\|_{W_2^1[0;l]}^2 \leq M, \quad |u(x)| \leq \sqrt{l} M.$$

По построению при достаточно большом  $M$  таким же оценкам удовлетворяет и функция  $\hat{u}_n(x, \xi)$ . Разность  $p(\hat{u}_n(x, \xi)) - p(u_\varepsilon(x)) = p'(\tilde{u})v_n$ , где  $\tilde{u} = \theta u(x) + (1 - \theta)\hat{u}_n(x, \xi)$ ,  $0 < \theta < 1$ . Значит,

$$|p'(\tilde{u})| < M_2, \quad |p(\hat{u}_n) - p(u_\varepsilon)| \leq M_2 |v_n|, \quad |v_n| \leq \sqrt{l} \|v_n\|_{W_2^1[0;l]}$$

и, кроме того,  $|\varphi_\varepsilon(x)| < M_3\varepsilon^{n+1}$ . Значит,

$$\begin{aligned} \nu \|v'_n\|_{L_2[0;l]}^2 &\leq \alpha M_2 \int_0^l |v'_n| \cdot |v_n| dx + M_3 \varepsilon^{n+1} \int_0^l |v_n| dx \leq \\ &\leq \alpha M_4 \|v_n\|_{W_2^1[0;l]}^2 + M_5 \|v_n\|_{W_2^1[0;l]} \varepsilon^{n+1}, \quad (38.10) \end{aligned}$$

где  $M_4$  и  $M_5$  — некоторые постоянные, не зависящие от  $\alpha$  и  $\varepsilon$ .

Но в силу (38.6)

$$\|v_n\|_{W_2^1[0;l]}^2 \equiv \|v_n\|_{L_2[0;l]}^2 + \|v'_n\|_{L_2[0;l]}^2 \leq (1 + l^2) \|v'_n\|_{L_2[0;l]}^2,$$

поэтому из (38.10) получим

$$\frac{\nu}{1 + l^2} \|v_n\|_{W_2^1[0;l]}^2 \leq \nu \|v'_n\|_{L_2[0;l]}^2 \leq \alpha M_4 \|v_n\|_{W_2^1[0;l]}^2 + M_5 \|v_n\|_{W_2^1[0;l]} \varepsilon^{n+1},$$

или

$$\left( \frac{\nu}{1 + l^2} - \alpha M_4 \right) \|v_n\|_{W_2^1[0;l]} \leq M_5 \varepsilon^{n+1}.$$

Это при достаточно малых  $\alpha$  дает  $\|v_n\|_{W_2^1[0;l]} = O(\varepsilon^{n+1})$ . Но в силу (38.5)

$$\|v_n\|_{C[0;l]} = O(\|v_n\|_{W_2^1[0;l]}) = O(\varepsilon^{n+1}). \quad \blacktriangledown$$

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

### Задачи к главе 1

1. Докажите, что для любой последовательности  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ) существует функция  $f(z)$ , аналитическая в комплексной плоскости при  $0 < |z| < 1$ ,  $\pi < \arg z < \pi$  и такая, что

$$f(z) \stackrel{\text{as}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \rightarrow 0.$$

2. Покажите, что для произвольной последовательности  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ), вообще говоря, не существует функции  $f(z)$ , аналитической всюду в выколотой окрестности нуля в комплексной плоскости.

### Упражнения к главе 1

1. Найти асимптотику при  $x \rightarrow \infty$  интеграла

$$I_1(x) = \int_x^{\infty} (t^2 + a^2)^n e^{-b^2 t^2} dt, \quad a > 0, b > 0,$$

с точностью до  $O(x^{n-7}e^{-bx^2})$ , т. е. так, чтобы остаток не превосходил  $Mx^{n-7}e^{-bx^2}$ ; найти постоянную  $M$ .

2. Найти асимптотику при  $x \rightarrow \infty$  интеграла

$$I_2(x) = \int_x^{\infty} (t + a)^{-1} \cos bt^2 dt, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

с точностью до  $O(x^{-5})$ , т. е. так, чтобы остаток не превосходил  $Mx^{-5}$ ; найти постоянную  $M$ .

3. Найти асимптотику при  $x \rightarrow \infty$  интеграла

$$I_3(x) = \int_{-\infty}^{-x} t^m e^{at} \sin bt^2 dt, \quad a > 0, b \in \mathbb{R},$$

с точностью до  $O(x^{m-4}e^{-ax})$ , т. е. так, чтобы остаток не превосходил  $Mx^{m-4}e^{-ax}$ ; найти постоянную  $M$ .

Вычисление асимптотики интеграла  $I_1(x)$ . Для примера рассмотрим частный случай:  $a = b = 1$ ,  $n = -2$ .

Достаточно два раза проинтегрировать по частям:

$$\begin{aligned} I &= \int_x^\infty (t^2 + 1)^{-2} e^{-t^2} dt = \int_x^\infty -\frac{1}{2t(t^2 + 1)^2} d(e^{-t^2}) = \\ &= \left( -\frac{1}{2t(t^2 + 1)^2} e^{-t^2} \right) \Big|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2t(t^2 + 1)^2} \right) e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2x(x^2 + 1)^2} e^{-x^2} + \int_x^\infty \frac{5t^2 + 1}{4t^3(t^2 + 1)^3} d(e^{-t^2}) = \frac{1}{2x(x^2 + 1)^2} e^{-x^2} - \\ &\quad - \frac{5x^2 + 1}{4x^3(x^2 + 1)^3} e^{-x^2} + \int_x^\infty \frac{35t^4 + 14t^2 + 3}{4t^4(t^2 + 1)^4} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = \frac{1}{2x(x^2 + 1)^2} e^{-x^2} - \frac{5x^2 + 1}{4x^3(x^2 + 1)^3} e^{-x^2} + R,$$

где  $R = \int_x^\infty \frac{35t^4 + 14t^2 + 3}{4t^4(t^2 + 1)^4} e^{-t^2} dt$ . Если  $t \geq x \geq 1$ , то  $\frac{35t^4 + 14t^2 + 3}{4t^4(t^2 + 1)^4} < 2t^{-8}$ . Следовательно,

$$|R| < \left| \int_x^\infty t^{-9} d(e^{-t^2}) \right| \leq x^{-9} \int_x^\infty t^{-9} d(e^{-t^2}) = x^{-9} e^{-x^2}.$$

Отметим, что первое слагаемое в ответе имеет порядок  $x^{-5}e^{-x^2}$ , а второе —  $x^{-7}e^{-x^2}$ .

В этом примере можно было сначала получить асимптотическое представление подынтегральной функции по простой калибровочной последовательности, а затем проинтегрировать это представление.

Сделав в исходном интеграле замену переменной  $\xi = t^2$ , получим

$$\begin{aligned} I &= \int_x^\infty (t^2 + 1)^{-2} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{x^2}^\infty \xi^{-1/2} (\xi + 1)^{-2} e^{-\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x^2}^\infty \xi^{-5/2} (1 + \xi^{-1})^{-2} e^{-\xi} d\xi = \frac{1}{2} \int_{x^2}^\infty \xi^{-5/2} (1 - 2\xi^{-1} + r(\xi)) e^{-\xi} d\xi, \end{aligned}$$

где  $|r(\xi)| \leq 3\xi^{-2}$ .

Отметим также, что при  $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-\alpha} e^{-\xi} d\xi &= x^{-2\alpha} e^{-x^2} + \alpha \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-\alpha-1} e^{-\xi} d\xi \leq \\ &\leq x^{-2\alpha} e^{-x^2} + \alpha e^{-x^2} \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-\alpha-1} d\xi \leq 2x^{-2\alpha} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Снова применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{x^2}^{\infty} (\xi^{-5/2} - 2\xi^{-7/2}) e^{-\xi} d\xi &= -\frac{1}{2} \left( (\xi^{-5/2} - 2\xi^{-7/2}) e^{-\xi} \right) \Big|_{x^2}^{\infty} - \\ &- \frac{1}{2} \int_{x^2}^{\infty} \left( \frac{5}{2} \xi^{-7/2} - 7\xi^{-9/2} \right) e^{-\xi} d\xi = \frac{1}{2} (x^{-5} - 2x^{-7}) e^{-x^2} + \frac{5}{4} \xi^{-7/2} e^{-\xi} \Big|_{x^2}^{\infty} + \\ &+ \frac{35}{8} \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-9/2} e^{-\xi} d\xi - 7 \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-9/2} e^{-\xi} d\xi = \left( \frac{1}{2} x^{-5} - \frac{9}{4} x^{-7} \right) e^{-x^2} + R. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = \left( \frac{1}{2} x^{-5} - \frac{9}{4} x^{-7} \right) e^{-x^2} + R_1,$$

где

$$\begin{aligned} |R_1| &= \left| -\frac{21}{8} \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-9/2} e^{-\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-5/2} r(\xi) e^{-\xi} d\xi \right| \leq \frac{33}{8} \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-9/2} e^{-\xi} d\xi \leq \\ &\leq \frac{34}{4} x^{-9/2} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

**Вычисление асимптотики интеграла  $I_2(x)$ .** Для примера рассмотрим частный случай  $a = -1$ ,  $b = 2$ . Так же как и в предыдущем примере, сделав замену  $\xi = t^2$ , получим равенство

$$\begin{aligned} I &= \int_x^{\infty} (t-1)^{-1} \cos(2t^2) dt = \frac{1}{2} \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-1} (1 - \xi^{-1/2})^{-1} \cos(2\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-1} (1 + \xi^{-1/2} + \xi^{-1} + \xi^{-3/2} + \xi^{-2} + r(\xi)) \cos(2\xi) d\xi, \end{aligned}$$



где  $|r(\xi)| \leq \frac{\xi^{-5/2}}{1 - \xi^{-1/2}}$ . При  $x \geq 2$  ( $\xi \geq 4$ ) это дает оценку  $|r(\xi)| \leq 2\xi^{-5/2}$ .  
Отсюда

$$\left| \frac{1}{2} \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-1} r(\xi) \cos(2\xi) d\xi \right| \leq \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-7/2} r(\xi) d\xi = \frac{2}{5} x^{-5}.$$

Отметим также, что при  $\alpha > 0$

$$\left| \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-\alpha} \cos(2\xi) d\xi \right| = \left| \frac{1}{2} x^{-\alpha} \sin(2x^2) - \frac{\alpha}{2} \int_{x^2}^{\infty} \xi^{-\alpha-1} \sin(2\xi) d\xi \right| \leq x^{-2\alpha}.$$

Теперь интегрированием по частям найдем оставшийся интеграл с нужной точностью:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{x^2}^{\infty} (\xi^{-1} + \xi^{-3/2} + \xi^{-2} + \xi^{-5/2} + \xi^{-3}) \cos(2\xi) d\xi = \\ = \frac{\sin(2\xi)}{4} (\xi^{-1} + \xi^{-3/2} + \xi^{-2}) \Big|_{x^2}^{\infty} + \\ + \frac{1}{4} \int_{x^2}^{\infty} \left( \xi^{-2} + \frac{3}{2} \xi^{-5/2} + 2\xi^{-3} \right) \sin(2\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{x^2}^{\infty} (\xi^{-5/2} + \xi^{-3}) \cos(2\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = -\frac{\sin(2x^2)}{4} (x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}) + \frac{\cos(2x^2)}{8} x^{-4} + R,$$

где

$$\begin{aligned} |R| = \left| -\frac{1}{8} \int_{x^2}^{\infty} 2\xi^{-3} \cos(2\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_{x^2}^{\infty} \left( \frac{3}{2} \xi^{-5/2} + 2\xi^{-3} \right) \sin(2\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{x^2}^{\infty} (\xi^{-5/2} + \xi^{-3} + \xi^{-1} r(\xi)) \cos(2\xi) d\xi \right| \leq \\ \leq \frac{1}{4} \left( \frac{3}{5} x^{-5} + 2x^{-6} \right) + \frac{1}{2} x^{-5} + \frac{1}{4} x^{-6} + \frac{2}{5} x^{-5} \leq \frac{61}{40} x^{-5}, \end{aligned}$$

поскольку при  $x > 1$  справедливо неравенство  $x^{-6} < x^{-5}$ .

**Вычисление асимптотики интеграла  $I_3(x)$ .** Асимптотику таких интегралов тоже нетрудно получить интегрированием по частям. Однако если интегрировать экспоненту, а дифференцировать тригонометрические и степенные функции, то асимптотического представле-

ния не получится. Если действовать наоборот: интегрировать тригонометрические функции (после умножения на соответствующий множитель), а дифференцировать остальные сомножители, то асимптотическое представление получить можно, но для получения требуемой оценки пришлось бы 4 раза интегрировать по частям, что несколько утомительно. Удобнее перейти к комплексным функциям, считая

$$I = \int_{-\infty}^{-x} t^m e^{at} \sin bt^2 dt = \Re J, \quad J = \int_{-\infty}^{-x} t^m e^{at+ibt^2} dt.$$

В качестве примера рассмотрим случай:  $a = b = 1$ ,  $m = 2$ ,  $J = \int_{-\infty}^{-x} t^2 e^{t+it^2} dt$ . Удобнее также сделать замену в интеграле, перейдя от  $t$  к  $-t$ . Таким образом,

$$J = \int_x^{\infty} t^2 e^{-t+it^2} dt = \frac{x^2 e^{-x+ix^2}}{1-2ix} + \frac{(2x-2ix^2)e^{-x+ix^2}}{(1-2ix)^3} + R,$$

где

$$R = \int_x^{\infty} \left( \frac{2}{(1-2it)^2} + \frac{12t^2+12it}{(1-2it)^4} \right) e^{-t+it^2} dt.$$

Если  $x > 1$ , то

$$|R| < \int_x^{\infty} \left( \frac{3t}{8t^3} + \frac{12t^2}{16t^4} \right) e^{-t} dt < \frac{9}{8} x^{-2} e^{-x}.$$

Итак,  $I = \Re J = I_0 + R_0$ , где  $|R_0| < \frac{9}{8} x^{-2} e^{-x}$ , а

$$\begin{aligned} I_0 &= \Re \left[ \left( \frac{x^2}{1-2ix} + \frac{(2x-2ix^2)}{(1-2ix)^3} \right) e^{-x+ix^2} \right] = \\ &= \left( \frac{x^2}{1+4x^2} - \frac{16x^5+6x^3-2x}{(1+4x^2)^3} \right) e^{-x} \sin x^2 + \\ &\quad + \left( \frac{2x^3}{1+4x^2} + \frac{8x^4-10x^2}{(1+4x^2)^3} \right) e^{-x} \cos x^2. \end{aligned}$$

Если не уточнять значение постоянной  $M$  в оценке остатка, то можно упростить дроби в полученном ответе:

$$I = \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4x} \right) e^{-x} \sin x^2 + \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{8x} \right) e^{-x} \cos x^2 + O(x^{-2} e^{-x}).$$

## Упражнения к главе 2

1. Найдите асимптотические представления для частичных сумм  $\sum_{k=1}^n k^{-1/2}$ , подобные представлению (6.1) и содержащие

- а) два члена,
- б) три члена,
- в) четыре члена асимптотики.

Найдите оценку приближения для больших  $n$  и некоторые численные значения.

2. Найдите асимптотические представления для частичных сумм  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$ , подобные представлению (6.1) и содержащие

- а) два члена,
- б) три члена,
- в) четыре члена асимптотики.

Найдите оценку приближения для больших  $n$  и некоторые численные значения.

3. Найдите сумму ряда  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^3 k}$ .

## Упражнения к главе 3

1. Найти асимптотику при  $\lambda \rightarrow \infty$  интеграла

$$I_1(\lambda) = \int_{a_1}^{b_1} \varphi(t) e^{\lambda P(t)} dt,$$

где  $P(t) = t^3 - (2a + b)t^2 + (a^2 + 2ab)t + c$ ,  $b > a > 0$ , а  $\varphi(t)$  — например, полином или тригонометрический полином. Вычислить два первых члена асимптотики и дать асимптотическую оценку остатка (без точного значения постоянной  $M$ ).

2. Найти асимптотику при  $\lambda \rightarrow \infty$  интеграла

$$I_2(\lambda) = \int_{a_1}^{b_1} \varphi(t) e^{-\lambda P(t)} dt,$$

где  $P(t) = t^3 - (2a + b)t^2 + (a^2 + 2ab)t + c$ ,  $b > a > 0$ , а  $\varphi(t)$  — например, полином или тригонометрический полином. Вычислить два первых члена асимптотики и дать асимптотическую оценку остатка (без точного значения постоянной  $M$ ).

3. Найти асимптотику при  $\lambda \rightarrow \infty$  интеграла

$$I_3(\lambda) = \int_{a_1}^{b_1} \varphi(t) e^{\lambda P(t)} dt,$$

где  $P(t) = 3t^4 + 4(a-b)t^3 - 6abt^2$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ , а  $\varphi(t)$  — например, полином или тригонометрический полином. Вычислить два первых члена асимптотики и дать оценку остатка (без точного значения постоянной  $M$ ).

4. Найти асимптотику при  $\lambda \rightarrow \infty$  интеграла

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi(t) e^{-\lambda P(t)} dt,$$

где  $P(t) = 3t^4 + 4(a-b)t^3 - 6abt^2$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ , а  $\varphi(t)$  — например, полином или тригонометрический полином. Вычислить два первых члена асимптотики и дать оценку остатка (без точного значения постоянной  $M$ ).

*Вычисление асимптотики интеграла  $I_1(\lambda)$ .* Возможны различные случаи общего положения:

- 1) если  $a_1 < a$ ,  $b_1 < b$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $a$ ;
- 2) если  $b_1 < a$  или  $b_1 > b$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $b_1$ ;
- 3) если  $a_1 > a$ ,  $b_1 > b$ , то максимум  $P(t)$  достигается либо в точке  $a_1$ , либо в точке  $b_1$  (либо в обеих точках, если эти максимумы равны).

Для примера рассмотрим случай  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 2$ ,  $c = 1$ ,  $\varphi(t) = \sin t$ .

Максимум  $P(t)$  достигается при  $t = 1$ ,  $P(1) = 4$  и для достаточно малого фиксированного  $\delta > 0$  справедливо соотношение

$$I = \int_0^2 \sin t e^{\lambda(t^3 - 5t^2 + 7t + 1)} dt = \int_{1-\delta}^{1+\delta} \sin t e^{\lambda(t^3 - 5t^2 + 7t + 1)} dt + O(\exp(1 - \gamma\lambda)),$$

где  $\gamma > 0$ .

В окрестности точки  $t = 1$  замена переменной  $P(t(z)) = -\frac{1}{2}z^2 + 4$ ,  $t(0) = 1$  преобразует интеграл к виду

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_2} \sin t(z) e^{-\lambda \frac{1}{2} z^2 + 4\lambda} t'(z) dz, \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0.$$

Следовательно,  $I = e^{4\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left( \psi(0) + \frac{\psi''(0)}{2\lambda} + O(\lambda^{-2}) \right)$ , где  $\psi(z) = \sin t(z) \cdot t'(z)$ .

Для нахождения производных функции  $\psi$  в нуле достаточно несколько раз продифференцировать тождество  $P(t(z)) = -\frac{1}{2}z^2 + 1$ :

$$(3t^2 - 10t + 7)t'(z) = -z, \quad (3t^2 - 10t + 7)t''(z) + (6t - 10)[t'(z)]^2 = -1.$$

Следовательно,  $t'(0) = \frac{1}{2}$ . Далее

$$(3t^2 - 10t + 7)t'''(z) + 3(6t - 10)t''(z)t'(z) + 6[t'(z)]^3 = 0, \quad t''(0) = \frac{1}{8},$$

$$(3t^2 - 10t + 7)t^{(4)}(z) + 4(6t - 10)t'(z)t'''(z) + 3(6t - 10)[t''(z)]^2 + \\ + 36t''(z)[t'(z)]^2 = 0,$$

$$t'''(0) = \frac{15}{128}, \quad \psi(0) = \frac{1}{2} \sin 1, \quad \psi''(0) = \frac{3}{16} \cos 1.$$

Итак,

$$I = e^{4\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left( -\frac{1}{128} \sin 1 + \frac{3 \cos 1}{32\lambda} + O(\lambda^{-2}) \right).$$

*Вычисление асимптотики интеграла  $I_2(\lambda)$ .* Возможны различные случаи общего положения:

- 1) если  $a_1 < \frac{4a-b}{3}$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $a_1$ ;
- 2) если  $a_1 > \frac{a+2b}{3}$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $a_1$ ;
- 3) если  $\frac{4a-b}{3} < a_1 < \frac{a+2b}{3}$ ,  $b_1 > \frac{a+2b}{3}$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $\frac{a+2b}{3}$ ;
- 4) если  $a_1 > \frac{4a-b}{3}$ ,  $b_1 < \frac{a+2b}{3}$ , то максимум  $P(t)$  достигается либо в точке  $a_1$ , либо в точке  $b_1$  (либо в обеих точках, если эти максимумы равны).

Для примера рассмотрим случай  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 4$ ,  $c = 1$ ,  $\varphi(t) = t^2$ .

Так как  $a_1 < \frac{4a-b}{3} = \frac{5}{3}$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $a_1 = 1$ . Поскольку

$$I = \int_1^4 t^2 e^{-\lambda(t^3 - 7t^2 + 16t + 1)} dt = \int_1^{1+\delta} t^2 e^{-\lambda(t^3 - 7t^2 + 16t + 1)} dt + \\ + O(\exp(-11\lambda - \gamma\lambda)),$$

где  $\delta > 0$  достаточно мало, а  $\gamma > 0$ , то асимптотика легко получается интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int_1^{1+\delta} t^2 e^{-\lambda(t^3-7t^2+16t+1)} dt &= \\ &= \frac{t^2 e^{-\lambda(t^3-7t^2+16t+1)}}{-\lambda(3t^2-14t+16)} \Big|_1^{1+\delta} + \frac{1}{\lambda} \int_1^{1+\delta} \frac{d}{dt} \left( \frac{t^2}{P'(t)} \right) e^{-\lambda P(t)} dt = \\ &= \frac{1}{5\lambda} e^{-11\lambda} - \frac{1}{\lambda^2 P'(t)} \frac{d}{dt} \left( \frac{t^2}{P'(t)} \right) e^{-\lambda P(t)} \Big|_1^{1+\delta} + \\ &+ \frac{1}{\lambda^2} \int_1^{1+\delta} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{P'(t)} \frac{d}{dt} \left( \frac{t^2}{P'(t)} \right) \right) e^{-\lambda P(t)} dt + O(\exp(-11\lambda - \gamma\lambda)) = \\ &= e^{-11\lambda} \left( \frac{1}{5\lambda} + \frac{18}{125\lambda^2} + O(\lambda^{-3}) \right). \end{aligned}$$

Указания к упражнению 3. Корни многочлена

$$P(t) = 3t^4 + 4(a-b)t^3 - 6abt^2$$

равны  $c_1 = \frac{1}{3}(2(b-a) - \sqrt{4b^2 + 10ab + 4a^2}) < 0$  и  $c_2 = \frac{1}{3}(2(b-a) + \sqrt{4b^2 + 10ab + 4a^2}) > 0$ .

Возможны различные случаи общего положения:

1) если  $c_1 < a_1 < 0 < b_1 < c_2$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $t = 0$ ;

2) если  $b_1 > c_2$ ,  $a_1 > c_1$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $b_1$ ;

3) если  $b_1 < c_2$ ,  $a_1 < c_1$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $a_1$ ;

4) если  $c_1 < a_1 < b_1 < 0$ , то максимум  $P(t)$  достигается либо в точке  $a_1$ , либо в точке  $b_1$  (либо в обеих точках, если эти максимумы равны);

5) если  $0 < a_1 < b_1 < c_2$ , то максимум  $P(t)$  достигается либо в точке  $a_1$ , либо в точке  $b_1$  (либо в обеих точках, если эти максимумы равны);

6) если  $a_1 < c_1$ ,  $b_1 > c_2$ , то максимум  $P(t)$  достигается либо в точке  $a_1$ , либо в точке  $b_1$  (либо в обеих точках, если эти максимумы равны).

Указания к упражнению 4. Пусть для определенности  $a > b$ . Обозначим

$$r_1 = -\frac{1}{3}(2a + b - \sqrt{4a^2 - 2ab - 2b^2}),$$

$$r_2 = -\frac{1}{3}(2a + b + \sqrt{4a^2 - 2ab - 2b^2}),$$

так что  $-P(b) = -P(r_1) = -P(r_2) = b^3(2a + b)$ . Тогда возможны различные случаи общего положения:

- 1) если  $a_1 < -a$ ,  $b > -a$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $-a$ ;
- 2) если  $b_1 < -a$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $b_1$ ;
- 3) если  $-a < a_1 < r_2$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $a_1$ ;
- 4) если  $r_2 < a_1 < b$ ,  $b_1 > b$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $b$ ;
- 5) если  $r_2 < a_1$ ,  $b_1 < b$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $a_1$ , либо в точке  $b_1$  (либо в обеих точках, если эти максимумы равны);
- 6) если  $a_1 > b$ , то максимум  $P(t)$  достигается в точке  $a_1$ , либо в точке  $b_1$  (либо в обеих точках, если эти максимумы равны).

### Упражнения к главе 4

1. Найти асимптотику при  $\lambda \rightarrow \infty$  интеграла  $\int_{a_1}^{b_1} \varphi(t) e^{i\lambda \cos nt} dt$ , где  $\varphi(t)$  — например, полином или тригонометрический полином. Вычислить три первых члена асимптотики и дать асимптотическую оценку остатка (без точного значения постоянной  $M$ ).

2. Найти асимптотику при  $\lambda \rightarrow \infty$  интеграла  $\int_{a_1}^{b_1} \varphi(t) \cos(\lambda \sin nt) dt$ , где  $\varphi(t)$  — например, полином или тригонометрический полином. Вычислить три первых члена асимптотики и дать асимптотическую оценку остатка (без точного значения постоянной  $M$ ).

3. Найти асимптотику при  $\lambda \rightarrow \infty$  интеграла  $\int_{a_1}^{b_1} \varphi(t) e^{i\lambda P(t)} dt$ , где

$$P(t) = t^3 - (2a + b)t^2 + (a^2 + 2ab)t + c, \quad b > a > 0,$$

а  $\varphi(t)$ , например, полином или тригонометрический полином. Вычислить три первых члена асимптотики и дать асимптотическую оценку остатка (без точного значения постоянной  $M$ ).

**Указания к упражнениям.** Асимптотика интегралов зависит от того, сколько стационарных точек показательной функции находится на отрезке  $a_1, b_1$ . Например, в упражнении 1, если  $a_1 < 0 < b_1 < \pi/n$ , то на отрезке  $[a_1; b_1]$  находится одна стационарная точка, если  $a_1 < 0 < \pi/n < b_1 < 2\pi/n$ , то две такие точки, а если  $0 < a_1 < b_1 < \pi/n$ , то стационарных точек нет.

В упражнении 3, если  $a_1 < a$  и  $b_1 > \frac{1}{3}(a + 2b)$ , то на отрезке  $[a_1; b_1]$  находятся две стационарные точки.

Если стационарных точек нет, то ответ получается трехкратным интегрированием по частям. Если стационарные точки имеются, то в ответ входят два слагаемых порядка  $x^{-1/2}$  и  $x^{-3/2}$  от каждой стационарной точки и по одному слагаемому порядка  $x^{-1}$  от каждого конца отрезка.

Вычисление асимптотики интеграла из упражнения 2. Рассмотрим следующий пример:

$$I = \int_0^1 (t^2 + 1) \cos(\lambda \sin 3t) dt.$$

Переходя к комплекснозначным функциям, получаем:  $I = \Re J$ , где

$$J = \int_0^1 (t^2 + 1) \exp(i\lambda \sin 3t) dt.$$

В данном случае имеется только одна стационарная точка,

$$t_0 = \pi/6, \quad S(t) = \sin 3t, \quad S(t_0) = 1, \quad S'(t_0) = 0, \quad S''(t_0) < 0.$$

В окрестности точки  $t_0$  замена независимой переменной  $\sin 3t = 1 - z^2/2$  приводит к изучению интеграла

$$J_1 = \int_{-\delta}^{+\delta} (t^2(z) + 1) \omega(z) \exp(i\lambda(1 - z^2/2)t'(z) dz,$$

где  $\delta > 0$ , а  $\omega(z)$  — описанная в § 17 срезающая функция.

Так как  $t = \frac{2}{3}(\arcsin(z/2) + \pi/4)$ , то  $t(0) = \pi/6$ ,  $t'(0) = 1/3$ ,  $t''(0) = 0$ ,  $t'''(0) = 1/12$ .

Вклад в асимптотику от стационарной точки  $\pi/6$  равен

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i(\lambda - \pi/4)) \left( \psi(0) - \psi''(0) \frac{i}{2\lambda} + O(\lambda^{-2}) \right),$$

где  $\psi(z) = (t^2(z) + 1) t'(z)$ . Таким образом,

$$J_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp(i(\lambda - \pi/4)) \times \\ \times \left( \frac{2}{3} \left( \frac{\pi^2}{36} + 1 \right) - \left( \frac{2}{27} + \frac{1}{12} \left( \frac{\pi^2}{36} + 1 \right) \right) \frac{i}{2\lambda} + O(\lambda^{-2}) \right).$$

Вклад в асимптотику интеграла  $J$  от концевых точек вычисляется однократным интегрированием по частям и равен  $\frac{2 \exp(i\lambda \sin 3)}{2i\lambda \cos 3} - \frac{1}{3i\lambda}$ . Таким образом,

$$J = \lambda^{-1/2} \sqrt{2\pi} \exp(i(\lambda - \pi/4)) \frac{2}{3} \left( \frac{\pi^2}{36} + 1 \right) + \lambda^{-1} \left( \frac{2 \exp(i\lambda \sin 3)}{2i \cos 3} - \frac{1}{3i} \right) - \\ - \lambda^{-3/2} \sqrt{2\pi} \exp(i(\lambda - \pi/4)) \left( \frac{2}{27} + \frac{1}{12} \left( \frac{\pi^2}{36} + 1 \right) \right) \frac{i}{2} + O(\lambda^{-2}).$$



Для получения асимптотики интеграла  $I$  достаточно взять действительную часть интеграла  $J$ :

$$I = \lambda^{-1/2} \sqrt{2\pi} \cos((\lambda - \pi/4)) \frac{2}{3} \left( \frac{\pi^2}{36} + 1 \right) + \lambda^{-1} \left( \frac{2 \sin(\lambda \sin 3)}{2 \cos 3} - \frac{1}{3} \right) + \\ + \lambda^{-3/2} \sqrt{2\pi} \sin((\lambda - \pi/4)) \left( \frac{1}{27} + \frac{1}{24} \left( \frac{\pi^2}{36} + 1 \right) \right) + O(\lambda^{-2}).$$

### Упражнения к главе 5

Найти асимптотику при  $x \rightarrow \infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$  интеграла. Выписать явно два члена асимптотики.

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + b^2)^{-1} \exp(ia^2 t^3 + ixt) dt.$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} (t^4 + b^4)^{-1} \exp(ia^2 t^3 x + ixt) dt.$$

Указания к упражнениям. Для вычисления асимптотики надо, как это делается в § 21, сместить контур интегрирования в комплексной плоскости (а в упражнении 1 еще сделать замену независимой переменной). Но при этом надо учесть, что в зависимости от соотношений между постоянными  $a$  и  $b$  могут появиться дополнительные слагаемые из-за полюсов функций  $(t^2 + b^2)^{-1}$  и  $(t^4 + b^4)^{-1}$ .

### Упражнения к главе 6

Найти асимптотику при  $x \rightarrow \infty$  общего решения уравнения. Выписать явно три члена асимптотики и асимптотическую оценку остатка.

$$1. 2xu'' + (2n+1)u' + 2a^2u = 0.$$

$$2. 2xu'' + (2n+1)u' - 2a^2u = 0.$$

$$3. u'' + (a^2 x^{2n} + x^m)u = 0.$$

$$4. u'' - (x^{2n} + a^2 x^m)u = 0.$$

$$5. u'' + (\exp(2ax) + b^2)u = 0.$$

$$6. u'' - (\exp(2ax) + b^2)u = 0.$$

Вычисление асимптотики решений уравнения 1. Для примера рассмотрим случай  $n = 3$ ,  $a = 1$ :

$$2xu'' + 7u' + 2u = 0.$$

В данном примере, если применить сначала первое преобразование Лиувилля, а затем добиваться того, чтобы коэффициент при функции

стал равным единице, процесс будет весьма долгим. Намного короче будет путь, при котором сначала применяется второе преобразование Лиувилля. Всегда сначала полезно оценить возможные пути преобразования.

Итак, в данном случае удобно сделать замену независимой переменной  $s = s(x)$ , так чтобы  $2x[s'(x)]^2 = 2$ . Поэтому положим  $s(x) = 2\sqrt{x}$ . После замены уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + 3\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{du}{ds} + u = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{6}{s} \frac{du}{ds} + u = 0.$$

Теперь можно с помощью замены неизвестной функции обратить в нуль коэффициент при первой производной:

$$u = vs^{-3}, \quad \frac{d^2 u}{ds^2} + v\left(1 - \frac{6}{s^2}\right) = 0.$$

Подставляя в это уравнение ряд  $v = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^{-k}$ , находим коэффициенты ряда:  $c_1 = 3i$ ,  $c_2 = -3$ ,  $c_k = 0$  при  $k > 2$ . Итак, одно решение

$$u_1(x) = x^{-3} e^{2i\sqrt{x}} \left(1 + \frac{3i}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{4x}\right).$$

Другое решение

$$u_2(x) = x^{-3} e^{-2i\sqrt{x}} \left(1 - \frac{3i}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{4x}\right).$$

*Вычисление асимптотики решений уравнения 4.* Для примера рассмотрим случай  $n = 3$ ,  $m = 5$ ,  $a = 2$ :

$$u'' - (x^6 + 4x^5)u = 0.$$

Последовательное применение преобразований Лиувилля приводит в этом случае к очень сложным и громоздким вычислениям. Значительно быстрее приводит к успеху метод, изложенный в замечании 2 к § 26.

Замена неизвестной функции  $u(x) = w(x)[Q(x)]^{-1/4} \exp S(x)$ , где в данном примере  $Q(x) = 4x^6 + x^5$ ,  $S(x) = \int_1^x [Q(x)]^{1/2}$ , приводит к уравнению

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{dw}{dx} \left(2Q(x)^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{Q'(x)}{Q(x)}\right) + w \left(\frac{5}{16} \frac{[Q'(x)]^2}{[Q(x)]^2} - \frac{1}{4} \frac{Q''(x)}{Q(x)}\right) = 0.$$

Асимптотику решения можно искать в виде  $1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{-k}$  и, как указано в упомянутом замечании, она является асимптотическим раз-

ложением истинного решения. Асимптотика коэффициентов имеет следующий вид:

$$2Q(x)^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{Q'(x)}{Q(x)} \doteq 2x^3 + 4x^2 - 4x + 8 - \frac{23}{x} + O(x^{-2}),$$

$$\frac{5}{16} \frac{[Q'(x)]^2}{[Q(x)]^2} - \frac{1}{4} \frac{Q''(x)}{Q(x)} = x^{-2} \left( \frac{15}{4} + \frac{15}{x} - \frac{55}{x^2} + O(x^{-3}) \right).$$

Следовательно,  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ,  $c_4 = \frac{15}{32}$ ,  $c_5 = -\frac{3}{8}$ ,  $c_6 = -\frac{10}{3}$ . Так как

$$Q^{-1/4}(x) = x^{-3/2} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} - \frac{15}{2x^3} + \frac{195}{8x^4} - \frac{663}{8x^5} + O(x^{-6}) \right),$$

$$Q^{1/2}(x) = x^3 \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{10}{x^4} + \frac{28}{x^5} - \frac{84}{x^6} + \frac{264}{x^7} - \frac{858}{x^8} + O(x^{-9}) \right),$$

$$\begin{aligned} \exp(S(x)) &= x^{-10} \exp \left( \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 - x^2 + 4x \right) \times \\ &\quad \times \exp \left( -\frac{28}{x} + \frac{42}{x^2} - \frac{88}{x^3} + \frac{429}{2x^4} + O(x^{-5}) \right), \end{aligned}$$

то ответ следующий: если ограничиться тремя членами асимптотического разложения, то одно решение равно

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x^{-23/2} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} + O(x^{-3}) \right) \left( 1 - \frac{28}{x} + \frac{434}{x^2} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left( \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 - x^2 + 4x \right) = \\ &= x^{-23/2} \left( 1 - \frac{29}{x} + \frac{924}{2x^2} + O(x^{-3}) \right) \exp \left( \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 - x^2 + 4x \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом строится и второе решение:

$$u_2(x) = x^{17/2} \left( 1 + \frac{27}{x} + \frac{649}{2x^2} + O(x^{-3}) \right) \exp \left( -\frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + x^2 - 4x \right).$$

### Упражнения к главе 7

Найти асимптотику при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения краевой задачи. Выписать явно равномерное асимптотическое приближение с точностью до  $O(\varepsilon^{3/2})$ .

1.  $\varepsilon u'' - xu = x^3$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $u(1) = 1$ ,  $u(2) = 1$ .

2.  $\varepsilon u'' - (x^2 + 1)u = x^4$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $u(0) = 1$ ,  $u'(2) = 1$ .

3.  $\varepsilon u'' - (x + 1)u = x^3$ ,  $2 \leq x \leq 3$ ,  $u'(2) - 2u(2) = 1$ ,  $u(3) = 3$ .

Найти асимптотику при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения краевой задачи. Выписать явно равномерное асимптотическое приближение с точностью до  $O(\varepsilon^2)$ .

$$1. \epsilon u'' + xu' + u = x^2, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad u(1) = 2, \quad u'(2) = 1.$$

$$5. \epsilon u'' + u' - x^2 u = x^3 - 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad u(0) = 1, \quad u(2) = 1.$$

$$6. \epsilon u'' + u' + xu = (x+1) \exp x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad u(1) = 0, \quad u(2) = 1.$$

$$7. \epsilon u'' - u' - 2xu = x, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad u(0) = 0, \quad u(2) = 1.$$

$$8. \epsilon u'' - xu' - u = \exp x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad u'(1) - u(1) = 1, \quad u(2) = 0.$$

Найти асимптотику при  $\epsilon \rightarrow 0$  интеграла. Выписать явно асимптотическое приближение с точностью до  $O(\epsilon^2)$ .

$$9. \int_0^1 \frac{(x^2+1)e^x}{x^3+\epsilon x^2+\epsilon^3} dx.$$

$$10. \int_0^1 \frac{\sin(x^2-1)}{\sqrt{x^4+\epsilon^2 x^2+\epsilon^4}} dx.$$

$$11. \int_0^1 \frac{x}{\arcsin^2 x + \epsilon^2} dx.$$

Указание к упражнению 11. После замены переменной

$$y = \arcsin^2 x \text{ искомый интеграл принимает вид } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos y}{y^2 + \epsilon^2} dy.$$

### Упражнения к главе 8

Найти асимптотику при  $\epsilon \rightarrow 0$  решения начальной задачи. Выписать явно равномерное асимптотическое приближение с точностью до  $O(\epsilon^2)$ .

$$1. \epsilon x' = (t^2 - x)(x^2 - 2x - t^2 + 6t - 8), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = -4.$$

$$2. \epsilon x' = (t^2 - x)(x^2 - 2x - t^2 + 6t - 8), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = -1.$$

$$3. \epsilon x' = (t^2 - x)(x^2 - 2x - t^2 + 6t - 8), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = 2.$$

$$4. \epsilon x' = (t^2 - x)(x^2 - 2x - t^2 + 6t - 8), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = 6.$$

$$5. \epsilon x' = (x - t^2)(x^2 - 2x - t^2 + 6t - 8), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = -1.$$

$$6. \epsilon x' = (x - t^2)(x^2 - 2x - t^2 + 6t - 8), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = 2.$$

$$7. \epsilon x' = (t^2 - x)(x^2 - t^2 - 2t - 1), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = -1/2.$$

$$8. \epsilon x' = (t^2 - x)(x^2 - t^2 - 2t - 1), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = 1/2.$$

$$9. \epsilon x' = (t^2 - x)(x^2 - t^2 - 2t - 1), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = 2.$$

### Упражнения к главе 9

Найти асимптотику при  $\epsilon \rightarrow 0$  решения начальной задачи. Выписать явно равномерное асимптотическое приближение с точностью до  $O(\epsilon^2)$  на отрезке длины  $O(\epsilon^{-1})$ .

1.  $\frac{d^2 u}{dt^2} + 9u = \varepsilon \left(\frac{du}{dt}\right)^3 u^2, \quad u(0) = 1, \quad \frac{du}{dt}(0) = 1.$
2.  $\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \varepsilon \left(\frac{du}{dt}\right)^2 (1 + 2u^2) + \frac{du}{dt} (1 + u), \quad u(0) = 1, \quad \frac{du}{dt}(0) = 1.$
3.  $\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \varepsilon \left(\frac{du}{dt}\right)^2 (u + u^2) + \frac{du}{dt} (1 + 2u), \quad u(0) = 1, \quad \frac{du}{dt}(0) = 1.$
4.  $\frac{d^2 u}{dt^2} + 4u = \varepsilon \left(\frac{du}{dt}\right)^3 u^4, \quad u(0) = 1, \quad \frac{du}{dt}(0) = 1.$
5.  $\frac{d^2 u}{dt^2} + 4u = \varepsilon \left(\frac{du}{dt}\right)^5 (u^3 - 4u^2), \quad u(0) = 1, \quad \frac{du}{dt}(0) = 1.$

### Задачи к гл. 10

1\* (Г. П. Панасенко). Пусть  $a(\xi)$ ,  $q(\xi)$  — бесконечно дифференцируемые функции, периодические по переменной  $\xi$ ,  $p(u)$  и  $f(x)$  бесконечно дифференцируемы. Пусть  $a(\xi) > \nu > 0$ ,  $p(0) = 0$ ,

$$\exists L \geq 0 \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R} \quad |p(u_1) - p(u_2)| \leq L \cdot |u_1 - u_2|.$$

Рассмотрим задачу

$$\frac{d}{dx} \left( a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) + \alpha p(u_\varepsilon) q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(l) = 0,$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, такой что  $\varepsilon = N^{-1}l$ ,  $N$  — большое натуральное число.

а) Доказать, что существует такое  $\alpha_0 > 0$ , что для всех  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq \alpha_0$ , эта задача имеет единственное решение.

б) Построить асимптотическое решение задачи вида (36.4). Определить все  $u_k(x, \xi)$ . Выписать задачу для  $u_0(x, \xi)$ .

в) Доказать, что существует такое  $\alpha_1 > 0$ , что для всех  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq \min \{\alpha_0, \alpha_1\}$  имеет место оценка

$$u_\varepsilon(x) - \hat{u}_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon^{n+1}),$$

где  $\hat{u}_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  — частичная сумма, определенная на с. 226 в теореме 38.1.

г) Можно ли ослабить условие  $L$ -липшицевости для  $p$  и условие  $p(0) = 0$ ?

2\* (Г. П. Панасенко). Пусть  $a(\xi)$ ,  $q_1(\xi)$ ,  $q_2(\xi)$  — бесконечно дифференцируемые функции, периодические по переменной  $\xi$ , и  $f(x)$  бесконечно дифференцируема. Пусть  $a(\xi) > \nu > 0$ .

Рассмотрим линейную задачу

$$\frac{d}{dx} \left( a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) + \alpha \left\{ q_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du_\varepsilon}{dx} + \frac{d}{dx} \left( q_2 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon \right) \right\} = f(x), \quad x \in (0, l),$$

$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(l) = 0,$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, такой что  $\varepsilon = N^{-1}l$ ,  $N$  — большое натуральное число.

Ответить на вопросы (а)–(в) задачи 1 применительно к этому линейному уравнению.

е) Как изменится построение асимптотики решения, если заменить граничное условие  $u_\varepsilon(l) = 0$  на  $\frac{du_\varepsilon}{dx}(l) = 0$ ?

Указание к задачам 1 и 2. Существование и единственность решения при малых  $\alpha$  доказывается с помощью принципа сжимающих отображений (С. Банах), как в гл. 10. При этом в качестве оператора  $A$  берется оператор, удовлетворяющий соотношению  $u \equiv Av$ , где  $u$  есть решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left( a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du}{dx} \right) = \begin{cases} f(x) - \alpha p(v) q \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) & \text{в задаче 1,} \\ f(x) - \alpha \left\{ q_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{dv}{dx} + \frac{d}{dx} \left( q_2 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) v \right) \right\} & \text{в задаче 2} \end{cases}$$

с условиями  $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(l) = 0$ .

Предварительно следует получить априорную оценку для решения типа

$$\left\| \frac{du_\varepsilon}{dx} \right\|_{L^2(0,l)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(0,l)}^2$$

при достаточно малых  $\alpha$ . Далее использовать подход, изложенный в гл. 10.

Уравнения для  $u_0$ : задача 1:

$$\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \alpha [q(\xi)]_{\text{ср}} p(u_0) = f(x);$$

задача 2:

$$\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \alpha [q_1(\xi) + q_2(\xi)]_{\text{ср}} \frac{du_0}{dx} + \left( \left[ \frac{q_2^2(\xi)}{a(\xi)} \right]_{\text{ср}} - \left[ \frac{q_2(\xi)}{a(\xi)} \right]_{\text{ср}}^2 \hat{a} \right) u_0 = f(x),$$

где  $\hat{a} = [a^{-1}(\xi)]_{\text{ср}}^{-1}$ .

Если условие  $u_\varepsilon(l) = 0$  заменено на  $\frac{du_\varepsilon}{dx}(l) = 0$ , то граничные условия для  $u_0$  будут следующими:  $u_0(0) = 0$ ,  $\frac{du_0}{dx}(l) = 0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А.* Метод возмущений в теории распространения волн // В сб.: Теория распространения волн в неоднородных и нелинейных средах. — М., 1979.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Вазов В.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
5. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1993.
6. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач — М.: Наука, 1989.
7. *Ильин А.М.* О методе двух масштабов в задаче о возмущении одночастотного колебания // Теор. и матем. физика. 1999. Т. 118, № 3. С. 383–389.
8. *Ильин А.М., Меленцов М.А.* Асимптотика решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при больших значениях времени // Труды Института математики и механики. 2005. Т. 11, № 1. С. 97–111.
9. *Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. — М.–Ижевск, 2005.
10. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. — М.–Л.: Физматгиз, 1963.
11. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. — Киев: Наукова Думка, 1974.
12. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
13. *Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С.* Усреднение. Методы и приложения. Белая серия в математике и физике. — Новосибирск: Изд-во «Тамара Рожковская», 2004.
14. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
15. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31 (73), № 3. С. 575–586.
16. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
17. *Адамс Е. (Adams E.)* Smithsonian mathematical formulae. — Washington, 1922.

18. Бенсуссан А., Лионс Ж., Паниколау Г. (Bensoussan, A., and Lions, J.-L., and Papanicolaou, G.) Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam: North-Holland, 1978.
19. Пуанкаре А. (Poincaré H.) Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires // Acta math. 1886. V. 8. P. 295–344.

### Литература по асимптотическим методам

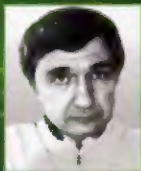
- 1\*. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в анализе в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.
- 2\*. Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
- 3\*. Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. — М.: Мир, 1961.
- 4\*. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки. Матем. анализ. 1967. ВИНТИ АН СССР. — М., 1969. С. 5–73.
- 5\*. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
- 6\*. Вайнберг Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
- 7\*. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.
- 8\*. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
- 9\*. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
- 10\*. Гадильшин Р. Р. Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задаче для оператора Лапласа // Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож. Тематические обзоры. 2003. Т. 5. С. 3–32.
- 11\*. Евграфов М. И. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Физматгиз, 1962.
- 12\*. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972.
- 13\*. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Изд-во МГУ, 1965.
- 14\*. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
- 15\*. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988.
- 16\*. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975.
- 17\*. Найфэ А. Методы возмущений. — М.: Мир, 1978.
- 18\*. Назаров С. А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Т. 1. Понижение размерности и интегральные оценки. — Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002.
- 19\*. Назаров С. А. Введение в асимптотические методы теории упругости. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.



- 20\*. Найфэ А. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.
- 21\*. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. — М.: Наука, 1978.
- 22\*. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990.
- 23\*. Риекстыньш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. Т. 1. — Рига: Зинатне, 1974.
- 24\*. Федорюк М.В. Метод перевала. — М.: Наука, 1983.
- 25\*. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987.
- 26\*. Эрдейи А. Асимптотические разложения. — М.: Физматгиз, 1962.
- 27\*. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
- 28\*. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений // УМН. 1960. Т. 15, № 3. С. 3–80.
- 29\*. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями // УМН. 1960. Т. 15, № 4. С. 27–95.
- 30\*. Гадильшин Р.Р. Существование и асимптотики полюсов с малой мнимой частью для резонатора Гельмгольца // УМН. 1997. Т. 52, № 1. С. 3–76.
- 31\*. Дородницын А.А. Асимптотика решения уравнения Ван-дер Поля // Прикл. матем. и мех. 1947. Т. 11, вып.3. С. 313–328.
- 32\*. Ильин А.М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай. II. Область с малым отверстием // Мат. сб. 1976. Т. 99, № 4. С. 514–537; 1977. Т. 103, № 2. С. 265–284.
- 33\*. Chang K. W., Howes F. A. Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Application. — N. Y.: Springer-Verlag, 1984.
- 34\*. Fraenkel L. E. On the method of matched asymptotic expansions. P. 1–3 // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1969. V. 65. P. 209–231, 233–251, 263–284.
- 35\*. Johnson R. S. Singular Perturbation Phenomena. — N. Y.: Springer-Verlag, 2005.
- 36\*. Kaplun S., Lagerstrom P. A. Asymptotic expansions of Navier–Stokes solutions for a small Reynolds numbers // J. Math. Mech. 1957. V. 6. P. 585–593.
- 37\*. Kevorkian J., Cole J. D. Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. — N. Y.: Springer-Verlag, 1996.
- 38\*. O'Malley R. E. Singularly Perturbed Linear Two-Point Boundary Value Problems // SIAM Review. 2008. V. 50, № 3. P. 459–482.
- 39\*. O'Malley R. E. Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations. — N. Y.: Springer-Verlag, 1991.
- 40\*. O'Malley R. E. Introduction to Singular Perturbations. Singularly Perturbed Linear Two-Point Boundary Value Problems. — N. Y.: Academic Press, 1974.
- 41\*. Verhulst F. Methods and Applications of Singular Perturbations. — N. Y.: Springer-Verlag, 2005.



**Ильин  
Арлен  
Михайлович**



**Данилин  
Алексей  
Руфимович**

Устойчивость движения, световой пуч, групповая скорость, релятивистские свойства и многое другое — это по сути дела асимптотические описания явлений. Одному известному физiku приписывается фраза: «Явление не является физическим, если в нем отсутствует малый параметр».